МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ГЕОТЕРМИИ

ДАГЕСТАНСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН (ИПГ ДНЦ РАН)

УДК 536.712, 536.752

Рег. № НИОКТР 01201360106

Рег. № ИКРБС 0204-2018-0007

УТВЕРЖДАЮ

ВРИО директора ИПГ ДНЦ РАН

_____ Д.К. Джаватов

«____» _____ 2019 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

в рамках государственного задания: «Фундаментальные научные исследования в соответствии с Программой фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы»;

направление 18: «Физико-технические и экологические проблемы энергетики; тепломассообмен; теплофизические и электрофизические свойства веществ; низкотемпературная плазма и технологии на ее основе»

по теме:

СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(промежуточный)

Руководитель темы
зав лаб. ММГО, д.ф.-м.н. _____ А.А. Аливердиев
подпись, дата

Махачкала 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

зав. лабораторией	_____ подпись, дата	А.А.Аливердиев (введение, заключение, разделы 1,2)
Старший научный сотрудник	_____ подпись, дата	В.Д. Бейбалаев (разделы 2,3)
Старший научный сотрудник	_____ подпись, дата	Р.А. Магомедов (разделы 1 приложения)
Младший научный сотрудник	_____ подпись, дата	Э.Н. Ахмедов (раздел 3)
Младший научный сотрудник	_____ подпись, дата	Р.Р. Мейланов (введение, раздел 3, приложения)

РЕФЕРАТ

Отчет 56 с., 5 табл., 6 рис., 109 источников, 2 прил.

ТЕРМОДИНАМИКА, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ, ТЕПЛОПЕРЕНОС, НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

Объектом исследования является математическое описание равновесных и неравновесных процессов и явлений с использованием аппарата дробного дифференцирование, в том числе применительно к прикладным задачам геотермии и расчетам уравнений состояния технически важных соединений.

Цель работы — обобщение равновесной и неравновесной термодинамики на основе математического аппарата интегрирования и дифференцирования дробного порядка (дробное исчисление).

В ходе выполнения проекта получен ряд новых оригинальных результатов, в частности, в 2018 году:

1. В рамках математического аппарата дробного исчисления в широком диапазоне температур и давлений рассчитаны теплофизические свойства инертных газов (неона, аргона, ксенона и криптона).

2. Получены данные о влиянии температуры и гидростатического давления на теплопроводность образцов песчаника и керамики.

В отчет также входит анализ экспериментальных данных по распределению температуры в поверхностных слоях земли, показавший, что при использовании решений нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени расчетные значения температуропроводности совпадают с экспериментальными.

По результатам исследований по теме осуществлено 57 научных публикаций (см. [9-65] из приведенного списка), из них 18 статей в рецензируемых журналах, 15 публикаций в изданиях, входящих в основные зарубежные реферативные базы данных [9-24]. Список публикаций непосредственно за 2018 приводится в приложении Б.

Основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики результатов, полученных в 2018 г.: 1) расчет уравнений состояний инертных газов, включая ксенон и криптон; 2) влиянии температуры и гидростатического давления на теплопроводность образцов песчаника и керамики.

Степень внедрения результатов НИР и их эффективность характеризуется научными публикациями и их цитированием.

Область применения: спектр потенциальных приложений охватывает широкий круг, включающий материаловедение и прикладную инженерию, в том числе задачи энергетики и геотермии.

ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Уравнение состояния – функциональное уравнение, связывающее термодинамические параметры (давление, температура, объем, химический потенциал) в состоянии термодинамического равновесия. Различают термическое уравнения состояния (связь между термодинамическими параметрами) и калорическое уравнение состояния (связь между термодинамическим потенциалом и термодинамическими параметрами).

Обобщенная термодинамика – термодинамика, построенная на основе математического аппарата дробного исчисления. Результаты обобщенной термодинамики переходят в результаты традиционной термодинамики, когда показатель производной равен единице.

«Фрактальное» уравнение состояния – однопараметрическое уравнения состояния, где параметром является показатель производной дробного порядка α $(0 < \alpha \leq 1)$ по термодинамическому параметру. При α=1 «фрактальное» уравнения состояния переходит в традиционное (классическое) уравнения состояния.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДИ	дробное исчисление;
ДД	дробное дифференцирование;
УС	уравнение состояния;
ФУС	«фрактальное» уравнение состояния;
ПДП	производная дробного порядка;
ППДП	показатель производной дробного порядка;
ТП	термодинамические параметры;
ТХ	термодинамические характеристики;
ТС	теплофизические свойства;
ОУС	однопараметрическое уравнение состояния.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ……..…… 7

1. Расчет теплофизических характеристик инертных газов на основе фрактального уравнения состояния …….…….…….…….… 9

2. Описание температурно-барической зависимости теплопроводности естественных и искусственных композитов..... 15

3. Определение коэффициента температуропроводности осадочных пород на основе нелокального уравнения теплопроводности в дробном исчислении..... 20

Заключение……..…… 28

Список использованных источников …….. 30

Приложение А …….. 43

Приложение Б …….. 53

ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием технологий получения новых материалов, созданием уникальных измерительных приборов, расширением области рабочих параметров веществ при их применения в различных технологических процессах, в том числе при освоении возобновляемым источников энергии появилась необходимость обобщения традиционной термодинамики для вывода новых уравнений состояния и исследования процессов нелокального тепломассопереноса в сложных средах, таких как геотермальные коллекторы.

В основе традиционной термодинамики лежит гипотеза молекулярного хаоса [1,2], приводящая к принципу локального равновесия. Предполагается упругость актов столкновения частиц, когда нет эффектов памяти и пространственных корреляций. Акты столкновения частиц локальны по времени и координате. Для многих физических систем (например, фрактальных и самоорганизующихся структур) условия гипотезы молекулярного хаоса не выполняются, что и приводит к необходимости обобщения термодинамики и статистической физики. В действительности акты столкновений частиц имеют более сложную природу, которая связана с тем, что потенциал взаимодействия сталкивающихся частиц зависит от импульсов частиц, что в конечном итоге приводит к нелокальным свойствам вещества, как эффект памяти и пространственных корреляций. Это приводит к невыполнению принципа локального равновесия, лежащего в основе традиционной термодинамики и к необходимости исходить из принципа локального неравновесия и учету нелокальных свойств и к различным обобщениям термодинамики. [3]

Можно отметить два разных направления обобщения термодинамики и статистической физики. В основе одного из направлений лежит использование принципа максимума энтропии. Если исходить из выражения энтропии Больцмана–Гиббса, то принцип максимума энтропии приводит к каноническому экспоненциальному распределению. Для получения класса неканонических степенных распределений исходят из обобщенных выражений для энтропии. Так, если вместо энтропии Больцмана–Гиббса $S = \sum_i p_i \ln p_i$, который приводит к экспоненциальному распределению $p(E) = \exp(-\beta E)$ (где $\beta = 1/kT$), использовать энтропию вида $S_q = (1 - \sum_i p_i^q)/(q-1)$ то, получится степенное распределение $p_q(E) = \left[1 + (1-q)(-\beta E)\right]^{\frac{q}{1-q}}$, $\ln_q(p_i) = (1 - \sum_i p_i^q)/(1-q)$.

При этом обобщенные выражения для энтропии и распределения при q=1 переходят в соответствующие выражения теории Больцмана–Гиббса. Подробное изложение этого метода можно найти в работах [4-7].

Обобщения неравновесной термодинамики связано с развитием концепции фрактала. Особенность систем с фрактальной структурой заключается в наличии развитой межфазной границы, с чем собственно и связана необходимость использования геометрии дробной размерности, имеющей свойства самоподобия [8]. Для веществ с фрактальной структурой не выполняется принцип локального равновесия, лежащий в основе традиционной термодинамики и необходимо исходить из принципа локального неравновесия, приводящий к необходимости учета нелокальных свойств и к различным обобщениям термодинамики [3]. Исследование неравновесных процессов в условиях принципа локального неравновесия приводят к необходимости учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координате).

Учет нелокальных эффектов в рамках традиционных подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где ядро интегрального оператора несет информацию о природе нелокальности. Для решения таких уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с возрастающими ППДП и при наличии малого параметра, ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствии малого параметра такой подход оказывается непродуктивным и, кроме того, полученные уравнения также не всегда получается решить. Производные дробного порядка, являясь определенным сочетанием обычных операций дифференцирования и интегрирования, открывают новый подход в теории нелокальных дифференциальных уравнений. За последнее время дробное исчисление (ДИ) применяется во всех направлениях развития естествознания.

Изложение основ обобщения равновесной термодинамики в производных дробного порядка, входившее в отчет 2017, в целях облегчение чтения отчета приведено в приложении А.

Основные результаты, полученные в ходе выполнения проекта, опубликованы в работах [9-65], в том числе в изданиях, входящих в основные реферативные базы данных (Web of Science и Scopus, см. [9-24]).

1. РАСЧЕТ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Наличие нового параметра ППДП в уравнении состояния, смысл которого заключается в возможности учета сложной природы потенциала взаимодействия между частицами, позволяет расширить область применимости фрактального уравнения состояния. Для удобства сравнения перепишем полученные уравнения (А.3.12)-(А.3.13) в соответствии с единицами измерения справочных данных

$$P = \rho R_\Gamma T \{1 + \rho B + (1-\alpha) \times$$

$$\times \left(\ln\left(\frac{eM}{\rho N_A} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right) + \psi(1) + \psi(2-\alpha) - \rho B \right) \Bigg\} , \qquad (1.1)$$

$$S = \frac{3}{2} R_\Gamma \ln\left(\left(\frac{eM}{\rho N_A} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right) +$$

$$+ \frac{3}{2} R_\Gamma \left(\frac{1}{2-\alpha} + \psi(2) + \psi(3-\alpha) \right) -$$

$$- R_\Gamma \frac{\rho}{M} \left(b - (1-\alpha) \frac{5-2\alpha}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{a}{N_A kT} \right) \qquad (1.2)$$

Для изохорной теплоемкости исходя из обобщенного соотношения $C_V = T^\alpha \dfrac{\partial^\alpha S}{\partial T^\alpha{}_V}$ (которое при $\alpha = 1$ переходит в известное соотношение $C_V = T \dfrac{\partial S}{\partial T_V}$) и выражения для энтропии, имеем

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{R_\Gamma}{\Gamma(2-\alpha)} \Bigg\{ 1 - \frac{18 P_c b^2}{N_A kT} + (1-\alpha) \times$$

$$\times \left[\ln\left(\left(\frac{eM}{\rho N_A} \right)^{2/3} \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right) - 1 - \rho b \left(\frac{2}{3} - \frac{18 P_c b^2}{N_A kT} \right) \right] \Bigg\} \qquad (1.3)$$

В выражениях (1.1)-(1.3) P – давление, *Па*; ρ – плотность, *кг/м*^{3}; $R_Г$ – удельная газовая постоянная; M – молярная масса; T – температура, *К*; N_A=6,02214·10^{23} *моль*$^{-1}$ – постоянная Авогадро; m – масса атома, *кг*; k=1,3806·10^{-23} *Дж·с* – постоянная Больцмана; $\hbar$=1,05457·10^{-34} *Дж·с* – постоянная Планка; $B(T) = b - \frac{a}{kT}$ – второй вириальный коэффициент; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; $P_c = \frac{a}{27b^2}$ – критическое давление, *Па*, e=2,71828… – экспонента.

Сравнения рассчитанных и табличных значений этих величин для аргона, неона и ксенона приведены в таблицах 1.1.-1.1. (суммаризированы по результатам публикаций за 2017-2018 годы).

В частности, сравнения рассчитанных и табличных значений этих величин для ксенона приведены в таблице 1.4. Анализ представленных в таблице результатов показывает, что расчетные значения теплофизических характеристик ксенона достаточно хорошо согласуются с табличными (справочными) данными [92], отклонение для значений энтропии ~ 0,02 %, для теплоемкости – ~ 3,5 %, что позволяет надеяться на перспективность предлагаемого метода для расчета термодинамических характеристик веществ при высоких температурах и давлениях близких к экстремальным. Полученная погрешность складывается от точности (количества цифр, взятых после запятой) физических констант, входящих в аналитические выражения и возможных допущений при их выводе. Актуальность в таких данных возникает в связи со сложностью проведения эксперимента при таких температурах и давлениях, и применением в ядерной энергетике.

Зависимости изохорной теплоемкости и энтропии от давления при температурах 1400 К и 2000 К приведены на рисунках 1.1 и 1.2 соответственно.

Первичные результаты получены также для криптона (см. рис. 1.3).

Как видим из рисунков и таблиц, результаты достаточно хорошо согласуются с табличными данными, что позволяет надеяться на перспективность предлагаемого метода для расчета термодинамических характеристик с использованием единственного параметра – показателя дробного порядка по термодинамическому параметру, вычисленного из фрактального уравнения состояния.

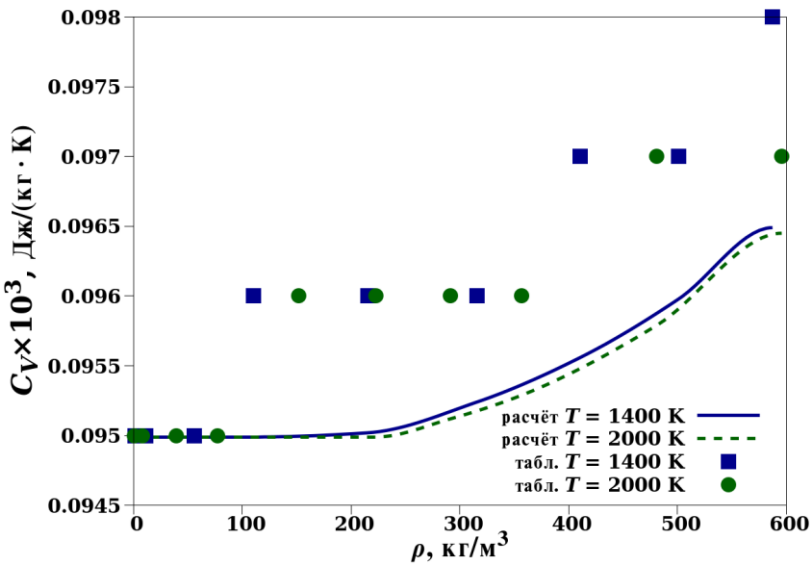


Рис. 1.1. Зависимость изохорной теплоемкости C_V от плотности ρ при T=1400 К и T=2000 К

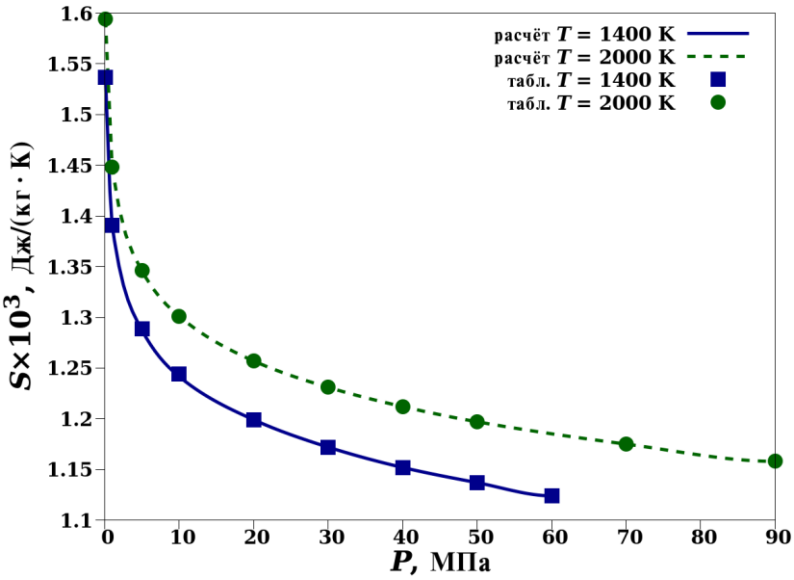


Рис. 1.2. Зависимость энтропии S от давления P при T=1400 К и T=2000 К

Таким образом, установлено, что исходя из обобщения равновесной термодинамики на случай производных дробного порядка, можно вывести однопараметрическое уравнение состояния (ОУС) и на его основании получить аналитические выражения для ТХ вещества. Как показывают проведенные нами расчеты, результаты удовлетворительно соответствуют экспериментально измеренным данным.

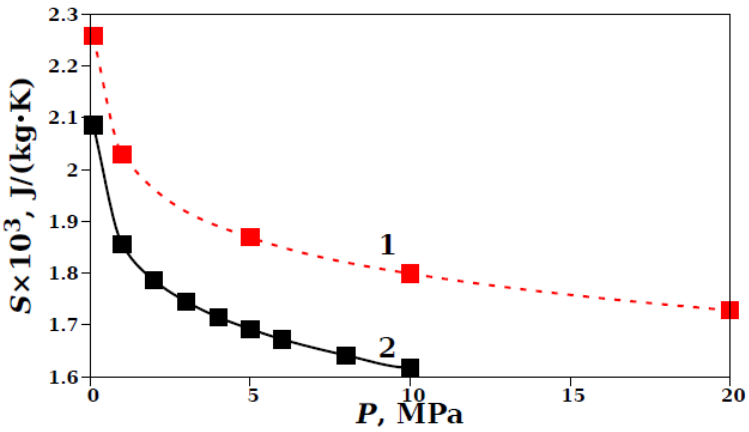


Рис. 1.3. Зависимость энтропии S от давления P для криптона при T=500 K.

Таблица 1.1. Тепловые свойства неона и аргона, *T*=900 K

P, МПа	ρ, кг/м^3	*z* [94]	*z*	S ×10^3, Дж/(кг·К) [94]	S ×10^3, Дж/(кг·К)	α
Неон, B_2=7,085·10^{-4} м^3/кг [92]						
0,1	0,27	1,0002	1,00019	8,393	8,39298	0,99999
1,0	2,69	1,0019	1,00267	7,445	7,44203	0,99954
2,0	5,37	1,0038	1,00453	7,159	7,15684	0,99954
3,0	8,05	1,0057	1,00641	6,992	6,98999	0,99954
4,0	10,71	1,0076	1,00827	6,874	6,87249	0,99954
5,0	13,36	1,0095	1,01015	6,782	6,78085	0,99954
6,0	16,00	1,0114	1,01202	6,707	6,70632	0,99954
8,0	21,25	1,0153	1,01590	6,588	6,58699	0,99954
10,0	26,47	1,0190	1,01959	6,496	6,49769	0,99954
Аргон, B_2=–5,007·10^{-4} м^3/кг [92]						
1,0	5,32	1,0026	1,00287	3,971	3,970590	0,99999
2,0	10,62	1,0051	1,00552	3,827	3,826590	0,99999
3,0	15,89	1,0077	1,00815	3,742	3,741589	0,99999
4,0	21,14	1,0103	1,01077	3,682	3,681589	0,99999
5,0	26,35	1,0129	1,01338	3,635	3,634588	0,99999
6,0	31,54	1,0156	1,01594	3,597	3,596571	0,99999
8,0	41,84	1,0208	1,02109	3,536	3,535590	0,99999
10,0	52,03	1,0261	1,02620	3,489	3,488595	0,99999
12,0	62,11	1,0315	1,03140	3,450	3,449594	0,99998
16,0	81,95	1,0423	1,04236	3,389	3,388592	0,99991
20,0	101,37	1,0532	1,05323	3,342	3,341579	0,99983

Таблица 1.2. Тепловые свойства неона и аргона, *T*=500 К

P, МПа	ρ, кг/м^3	*z* [94]	*z*	S ×10^3, Дж/(кг·К) [94]	S ×10^3, Дж/(кг·К)	A
Неон, B_2=6.738·10^{-4} м^3/кг [92]						
1,0	4,84	1,0033	1,00326	6,839	6,83900	0,99999
2,0	9,65	1,0066	1,00657	6,553	6,55294	0,99999
3,0	14,42	1,0099	1,01003	6,386	6,38601	0,99998
4,0	19,17	1,0132	1,01305	6,267	6,26690	0,99997
5,0	23,88	1,0165	1,01650	6,175	6,17501	0,99997
6,0	28,57	1,0197	1,01958	6,100	6,09992	0,99997
8,0	37,84	1,0263	1,02640	5,981	5,98096	0,99993
10,0	47,00	1,0329	1,03296	5,888	5,88802	0,99991
Аргон, B_2=1,827·10^{-4} м^3/кг [92]						
1,0	0,96	1,0002	1,00097	4,145	6,83900	0,99996
2,0	9,59	1,0017	1,00200	3,664	6,55294	0,99998
3,0	19,15	1,0035	1,00358	3,519	6,38601	0,99999
4,0	28,67	1,0054	1,00550	3,433	6,26690	0,99998
5,0	38,16	1,0074	1,00726	3,372	6,17501	0,99998
6,0	47,60	1,0095	1,00938	3,324	6,09992	0,99995
8,0	57,00	1,0116	1,01150	3,284	5,98096	0,99992
10,0	75,66	1,0161	1,16048	3,222	5,88802	0,99984

Таблица 1.3. Тепловые свойства неона и аргона, *T*=1500 К

P, МПа	ρ, кг/м^3	*z* [94]	*z*	S ×10^3, Дж/(кг·К) [94]	S ×10^3, Дж/(кг·К)	α
Неон, B_2=6,986·10^{-4} м^3/кг [92]						
1,0	1,62	1,0011	1,00135	7,971	7,97048	0,99999
5,0	8,05	1,0056	1,00583	7,308	7,30770	0,99999
10,0	16,01	1,0111	1,01157	7,023	7,02271	0,99998
20,0	31,66	1,0222	1,02249	6,737	6,73597	0,99998
30,0	46,99	1,0332	1,03326	6,571	6,57241	0,99997
40,0	62,00	1,0441	1,04427	6,453	6,45784	0,99995
50,0	76,70	1,0550	1,05535	6,361	6,37370	0,99990
Аргон, B_2=6,058 10^{-4}·10^{-4} м^3/кг [92]						
1,0	3,20	1,0019	1,001961	4,237	4,23701	0,99999
5,0	15,86	1,0095	1,009833	3,902	3,90225	0,99999
10,0	31,43	1,0191	1,019134	3,757	3,75722	0,99999
20,0	61,71	1,0382	1,038261	3,612	3,61589	0,99995
30,0	90,89	1,0573	1,057675	3,527	3,54412	0,99986
40,0	119,03	1,0764	1,077256	3,467	3,51036	0,99972
50,0	146,18	1,0956	1,097094	3,419	3,49470	0,99953

Таблица 1.4. Теплофизические параметры ксенона

P , МПа	ρ , кг/м^3	α	S[92]×10 ^{3}, Дж/(кг·К)	S×10 ^{3}, Дж/(кг·К)	C_V [92]× 10 ^{3}, Дж/(кг·К)	C_V ×10 ^{3}, Дж/(кг·К)
1	2	3	4	5	6	7
T = 500 К, *B*=−3,034·10^{-4} м^3/кг [94]						
0,1	3,16	0,99998	1,374	1,37402	0,095	0,09501
1,0	31,87	0,99996	1,227	1,22699	0,096	0,09503
2,0	64,31	0,99990	1,181	1,18101	0,096	0,09509
3,0	97,33	0,99982	1,154	1,15402	0,097	0,09517
4,0	130,94	0,99972	1,134	1,13403	0,098	0,09527
5,0	165,13	0,99961	1,118	1,11807	0,099	0,09537
6,0	199,91	0,99947	1,104	1,10413	0,099	0,09550
8,0	271,23	0,99913	1,082	1,08229	0,101	0,09581
10,0	344,82	0,99868	1,064	1,06456	0,102	0,09621
T=1000 К, *B*=1,165·10^{-4} м^3/кг [94]						
0,1	1,58	0,99999	1,484	1,48399	0,095	0,09487
1,0	15,77	0,99999	1,338	1,33799	0,095	0,09487
5,0	78,27	0,99999	1,235	1,23501	0,095	0,09487
10,0	155,03	0,99997	1,189	1,18902	0,096	0,09502
20,0	303,43	0,99967	1,142	1,14204	0,097	0,09532
30,0	444,30	0,99910	1,114	1,11415	0,098	0,09587
40,0	577,16	0,99830	1,093	1,09338	0,098	0,09662
T=1400 К, *B*=2,173·10^{-4} м^3/кг [94]						
0,1	1,13	0,99999	1,537	1,53698	0,095	0,09499
1,0	11,25	0,99999	1,391	1,39100	0,095	0,09499
5,0	55,76	0,99999	1,289	1,28745	0,095	0,09499
10,0	110,25	0,99999	1,244	1,24157	0,096	0,09499
20,0	215,39	0,99997	1,199	1,19900	0,096	0,09502
30,0	315,49	0,99976	1,172	1,17199	0,096	0,09524
40,0	410,70	0,99944	1,152	1,15195	0,097	0,09556
50,0	501,21	0,99901	1,137	1,13699	0,097	0,09598
60,0	587,26	099848	1,124	1,12399	0,098	0,09649
T=2000 К, *B*=2,832·10^{-4} м^3/кг [94]						
0,1	0,79	0,99999	1,594	1,59398	0,095	0,09499
1.0	7,88	0,99999	1,448	1,44799	0,095	0,09499
5.0	39,07	0,99999	1,346	1,34599	0,095	0,09499
10.0	77,35	0,99999	1,301	1,30098	0,095	0,09499
20.0	151,57	0,99999	1,257	1,25698	0,096	0,09499
30.0	222,81	0,99999	1,231	1,23098	0,096	0,09499
40.0	291,21	0,99988	1,212	1,21199	0,096	0,09512
50.0	356,93	0,99971	1,197	1,19699	0,096	0,09529
70,0	480,87	0,99923	1,175	1,17500	0,097	0,09579
90,0	595,73	0,99867	1,158	1,15801	0,097	0,09645

2. ОПИСАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНО-БАРИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

Описание и предсказание поведения температурно-барической зависимости естественных и искусственных многокомпонентных композитных материалов является важным для множества приложений, как связанных с науками о Земле (геология, геотермия), так и с прикладными задачами различных отраслей инженерии.

Существующая в настоящее время теория, описывающая процессы переноса тепла в диэлектриках, показывает, что температурная зависимость теплопроводности $\lambda(T)$ является весьма чувствительным параметром по отношению к кристаллической структуре, сжимаемости и упругим постоянным. Теплоперенос идеальных кристаллов носит волновой характер, описывается моделями Эйкина [99] и Дебая [100], и имеет температурную зависимость $\lambda \sim T^{-1}$, в то время как процесс переноса тепла аморфных структур носить активационный характер, где передача тепла от атома к атому, и имеет температурную зависимость $\lambda \sim T^{0.5}$.

В неупорядоченных кристаллических твёрдых телах атомы занимают правильное положение в узлах кристаллической решётки, но порядок расположения атомов различных сортов не соблюдается. В результате массы атомов и их силовые константы беспорядочно меняются от узла к узлу, что вызывает рассеяние тепловых волн. Помимо этого, значительное влияние на величину λ эффективной теплопроводности оказывают границы блоков и дефекты кристаллической решётки. Поэтому процесс переноса тепла в неупорядоченных структурах носит достаточно сложный характер.

Анализ экспериментальных и теоретических работ показал, что температурная зависимость теплопроводности большого класса соединений хорошо описывается степенным законом. При этом показатель степени n в (1) находится в пределах от –1 до +0.5, где n=–1 относится к достаточно чистым кристаллическим диэлектрикам с волновым механизмом переноса тепла, а $n \approx 0.5$ – к аморфным твёрдым телам с активационным механизмом переноса тепла. Многокомпонентные поликристаллические диэлектрики, у которых имеются большое количество дефектов и нарушения симметрии кристаллической решётки, также подчиняются степенному закону с характерной величиной $n \approx -0.5$ [101], а для ряда горных пород и композитных соединений теплопроводность может оставаться постоянной в в области температур от 273-523 К (n=0). В общем случае, величина и знак показателя n может дать оценку кристаллической структуре исследуемого материала и процессам переноса тепла в них.

Гидростатическое сжатие композитного материала приводит к внутренним напряжениям сложного характера, вызывающим изменение объема и упругих параметров решетки. Влияние давления на теплопроводность твердых тел обычно рассматривается, основываясь на формуле Лейбфрида-Шлемана [101]:

$$\lambda = const \frac{Ma\theta^3}{\gamma^2 T} \qquad (2.1)$$

где M–молекулярный вес, a – постоянная решетки, θ –температура Дебая, γ–параметр Грюнайзена.

Согласно выражению (1) давление должно приводить к линейному росту величины решёточной теплопроводности. Однако экспериментальные барические зависимости теплопроводности полупроводников и горных пород, как правило, носят нелинейный характер. Особенно это касается начальной области 0.1-100 МПа. Вместе с тем эта (как и прилегающая к ней) область представляет как фундаментальный, так и прикладной интерес. Построению модели теплопроводности горных пород и композитных материалов в области 0-400 МПа на основе анализа экспериментальных зависимостей и посвящена настоящая работа.

Измерения в области температур 273-523 К и давления от 0.1 до 400 МПа проводились абсолютным стационарным методом, погрешность которого не превышала 3-4%. [102]

Для подробного анализа экспериментальных температурной и барической зависимостей теплопроводности нами были взяты данные горных пород: гранита (Республика Дагестан, глубина залегания 3020 – 3090 м, пористость 1%, плотность $\rho = 3.2 \cdot 10^3 кг/м^3$) [103], мелкозернистого песчаника (Республика Дагестан, глубина залегания 4900 - 4950м, открытая пористость 7% , плотность ρ = 2.28 10^3 кг м $^{-3}$) [104], мергеля (Сухокумское нефтегазовое м/р, Скв. №22, глубина залегания 3815м, пористостью 11.3% и плотностью $\rho = 2.57 \cdot 10^3 кг/м^3$) [105], а также слюдокерамики (плотность $\rho = 2.69 \cdot 10^3 кг/м^3$, пористость 2%) [106] и полупроводникового соединения $CdGeAs_2$ (поликристаллические образцах n-типа с концентрацией носителей тока $10^{17} см^{-3}$) [107].

Применив степенной закон как к переменной (T), так и для фиксированной (T_0) температурам, можно перейти к безразмерным величинам:

$$\lambda(T,P) = \lambda(T_0,P) \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{n(P)}, \qquad (2.2)$$

где $\lambda(T_0, P)$ представляет собой барическую зависимость теплопроводности при фиксированной температуре T_0.

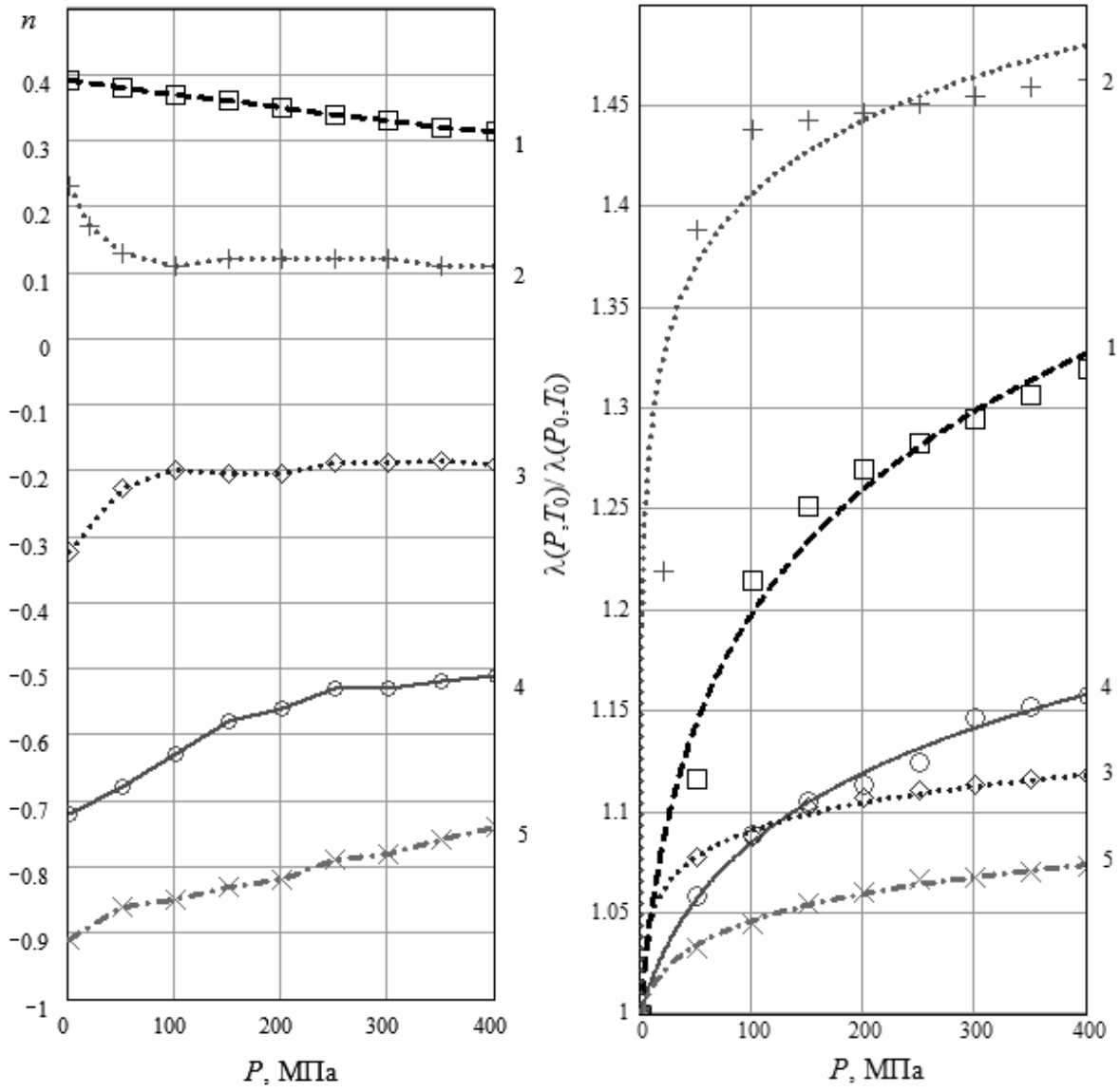
Зависимости $n(P)$ для рассматриваемых образцов приведены на рис. 1 а. Представленные символами значения $n(P)$ рассчитывались по экспериментальным температурным зависимостям для каждого давления методом наименьших квадратов.

Особо следует обратить, внимание на то, что коэффициент n в уравнении (2.1) является объективным параметром, зависящим от давления и не зависящим от выбора температуры T_0. С помощью безразмерной функции $f(P) = \dfrac{\lambda(T_0, P)}{\lambda(T_0, P_0)}$ выражение (2.2) может быть переписана в виде $\lambda(T, P) = \lambda(T_0, P_0) \cdot f(P) \cdot \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{n(P)}$.

Будучи безразмерной, функция $f(P)$ удобна для сравнительного анализа различных материалов, абсолютные значения теплопроводности которых могут различаться более чем на порядок. Для описания $f(P)$ во всём исследуемом диапазоне для большинства исследуемых образцов следующее эмпирическое представление $f(P) = \left(\dfrac{P_0^* + P}{P_0^* + P_0}\right)^{\beta}$, где β – безразмерная константа, а P_0^* – константа, имеющая размерность давления. Если положить $P_0 = 0$ (отметим, что в исследуемом диапазоне атмосферное давление (0.1 МПа) можно рассматривать как малую поправку относительно нулевого давления), получаем:

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \cdot \left(1 + \frac{P}{P_0^*}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{n(P)}. \qquad (2.3)$$

В выражение (7), определяющем теплопроводность в любой точке *TP*-плоскости, входят три постоянных параметра: $\lambda_0 = \lambda(T_0, 0)$, P_0^*, β и зависимость $n(P)$. Причем функция $n(P)$ на начальном этапе всегда убывает по модулю с ростом давления. Для ряда соединений эта зависимость носит линейный или хотя бы квазилинейный характер (см. 1, 4,5 на рис. 2.1), для других же – зависимость более сложная (см. 2,3 на рис. 2.1). Можно также обратить внимание на то, что $|n|$ для соединений 2,3 существенно меньше, чем у соединений 1,2 и 4.



(а) (б)

Рис. 2.1. Зависимости: а) $n(P)$ и б) $f(P)=\dfrac{\lambda(T_0,P)}{\lambda(T_0,P_0)}$ для: (1) мергеля, (2) слюдокерамики, (3) песчаника, (4) гранита и (5) поликристаллического $CdGeAs_2$. Для $f(P)$ символами показаны экспериментальные значения, нормированные согласно (3), а линиями – расчетные согласно (5).

Значения величин β и P_0^*, найденными по экспериментальным точкам методом наименьших квадратов, представлены в таблице 2.1, а результаты расчета по ним $f(P)$ – на рисунке 2.1 б, где приведены как полученные непосредственно из экспериментальных данных согласно (3) значения (точки), так и рассчитанные, согласно выражению (5) зависимости.

Как видно из таблицы значения константы P_0^* для образцов с квазилинейной зависимостью $n(P)$ существенно превосходит соответствующую константу для образцов с нелинейной зависимостью $n(P)$.

Таблица 2.1. Значения барических коэффициентов для представленных образцов (нумерация как на рис.1)

№	**ОБРАЗЕЦ**	β	P_0^***, МПА**	***N*(0)**
1	мергель	0.078	10.9	0.39
2	слюдокерамика	0.037	0.01	0.23
3	песчаник	0.018	0.8	–0.32
4	гранит	0.054	28.3	–0.72
5	$CdGeAs_2$	0.020	11.7	–0.91

Предложено малопараметрическое описание начальной области температурно-барической зависимости теплопроводности, с большой точностью описывающее поведение теплопроводности большей части исследуемых образцов.

Выявлено, что рост давления приводит к снижению температурной зависимости теплопроводности за счет уменьшения степенного показателя $n(P)$. Причем, если для одних соединений уменьшении *n* с давлением носит линейный (квазилинейный) характер во всём диапазоне 0-400 МПА, то для других – имеет место быстрое изменение до 100-150 МПа, после чего значение *n* меняется слабо. Второе поведение обнаруживается в первую очередь у соединений с малым $|n|$.

Обнаружено, что изотермическая барическая зависимость теплопроводности для большинства соединений может быть описано простым двухпараметрическим степенным законом.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ОСАДОЧНЫХ ПОРОД НА ОСНОВЕ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

В настоящее время, несмотря на накопленный экспериментальный материал и многочисленные теоретические построения, изучение теплофизических свойств осадочных пород далеки от завершения. Исследование теплофизических параметров и выявление общих закономерностей явлений тепломассопереноса осадочных пород затруднено рядом обстоятельств. Прежде всего, сложная структура пор и гетерофазность пород приводят к необходимости учета нелокальных свойств по времени (эффект памяти) и координатам (эффект пространственных корреляций).

Отметим еще одно обстоятельство, имеющее фундаментальное значение. Традиционный статистический подход при описании неравновесных процессов основан на предположении о существовании параметров «сокращенного описания», выделяющихся для их описания большими временными масштабами. При этом важно то, что наряду с иерархией временных масштабов, позволяющих ввести «сокращенные параметры», существует также и определенная субординация между медленно и быстро меняющимися величинами благодаря возникновению особого рода корреляций частиц системы. Эти корреляции и приводят к тому, что параметры сокращенного описания системы начинают определять состояние системы, и не нужно всякий раз проводить усреднение ее микроскопической динамики. Для этого необходимо, чтобы характерные времена корреляций микроскопических переменных τ_{mic} должны быть значительно меньше характерных времен изменения макроскопических (параметров «сокращенного описания» или гидродинамических параметров) времен τ_{mac}: $\tau_{mic} << \tau_{mac}$. Это соотношение лежит в основе различных процедур усреднения многочастичных функций распределения с последующим выводом традиционных уравнений движения для явлений переноса. Однако, для широкого класса веществ, особенно имеющих фрактальную структуру, имеет место медленная релаксация быстрых процессов. Эти процессы происходят по степенному закону $\tau^{-\alpha}$. В этом случае в системе быстрые процессы не успевают релаксироваться за времена порядка τ_{mac}. Для таких быстрых процессов нарушается условие $\tau_{mic} << \tau_{mac}$ и имеет место условие $\tau_{mic} \approx \tau_{mac}$. В конечном итоге это приводит к расходящимся величинам в кинетических коэффициентах и к яркому проявлению нелинейных свойств, эффектов памяти, самоорганизации. Для таких систем также характерно отсутствие локальных приближений, как по пространственным, так и по временным характеристикам.

В результате вместо традиционных уравнений математической физики необходимо исходить из математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка.

Следующее обстоятельство связано с изменчивостью механических параметров, минералогического состава, что затрудняет сопоставление экспериментальных данных разных авторов, приводимых без подробного описания изученных образцов. В этой связи актуальным становится с одной стороны проведение дальнейших экспериментальных исследований с применением тепловизоров и лазеров для создания четкой и внутренне законченной картины теплофизики материала осадочной толщи литосферы, с другой – дальнейшее развитие математической теории нелокальной теплопроводности.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

В геотермии задача без начальных условий применяется для исследования распространении суточных, годовых и вековых колебаний на поверхности вглубь земли. При этом определяется глубина распространения колебаний температуры вглубь земли, фаза запаздывания колебаний и температуропроводность.

При обобщении задачи без начальных условий на основе нелокального уравнения теплопроводности удобно исходит из решения задачи для полупространства, в котором необходимо перейти к пределу устремления начального момента времени в минус бесконечность. Рассмотрим задачу для полупространства, когда $0<\xi<\infty, \tau>0$. В этом случае уравнение теплопроводности в производных дробного порядка принимает вид [108]

$$\frac{\partial^{\alpha} T(\xi,\tau)}{\partial \tau^{\alpha}} - D\frac{\partial^{\beta} T(\xi,\tau)}{\partial \xi^{\beta}} - \frac{T(\xi,\tau_0)}{\Gamma(1-\alpha)\tau^{\alpha}} = 0 \qquad (3.1)$$

с граничным условием $T(0,\tau)=\mu(\tau)$, $D = at_0/x_0^2$–безразмерный коэффициент температуропроводности, где $a^2 = \lambda / c_p\rho$ – коэффициент температуропроводность среды, c_p – удельная изобарная теплоемкость, ρ – плотность вещества, λ – коэффициент теплопроводности, $0<\alpha\le 1, 0<\beta\le 2; \tau = t/t_0, \xi = x/x_0$ – безразмерные время и координата, t_0, x_0 – характерные время и масштаб, $\Gamma(x)$ – Гамма функция Эйлера.

Здесь производная Рисса $\frac{\partial^{\beta} T(\xi,\tau)}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{1}{2\Gamma(2-\beta)\cos(\pi(2-\beta)/2)}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\int_0^{\infty}\frac{T(\xi',\tau)}{|\xi-\xi'|^{\beta-1}}d\xi'$ учитывает пространственные корреляции (пространственная нелокальность), а

производная Лиувилля $\frac{\partial^\alpha T(\xi,\tau)}{\partial\tau^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{T(\xi,z)}{(\tau-z)^\alpha}dz$ – память (нелокальность по времени).

Решение уравнения (3.1) ищем в виде суммы $T(\xi,\tau)=T_1(\xi,\tau)+T_2(\xi,\tau)$, где $T_1(\xi,\tau)$ и $T_2(\xi,\tau)$ удовлетворяют краевым условиям $T_1(\xi,0)=\psi(\xi), T_1(0,\tau)=0$; $T_2(\xi,0)=0, T_2(0,\tau)=\mu(\tau)$.

Для нахождения $T_1(\xi,\tau)$ используем метод продолжения задачи полупространства на полное пространство (производная Рисса определена и для полного пространства). Заметив, что если функция $\psi(\xi)=-\psi(-\xi)$, то функция

$$U(\xi,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi'\exp(-ik(\xi-\xi'))\psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha)$$

обращается в ноль при $\xi=0$.,рассмотрим вспомогательную задачу: определим функцию $U(\xi,\tau)$ для $|\xi|<\infty$, удовлетворяющую уравнению (3.1) на полном пространстве с краевыми условиями $U(0,\tau)=0, U(\xi,0)=\psi(\xi)$.для $\xi>0$ Такое решение можно определить с помощью функции

$$\Psi(\xi)=\begin{Bmatrix}\psi(\xi),\xi>0\\-\psi(-\xi),\xi<0\end{Bmatrix},$$

И имеет вид

$$U(\xi,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi'\exp(-ik(\xi-\xi'))\Psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha).$$

Рассмотрим $U(\xi,\tau)$ только в области $\xi\ge 0$, где $U(\xi,\tau)=T(\xi,\tau)$. Имеем

$$U(\xi,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi'\exp(-ik(\xi-\xi'))\Psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}dk\int\limits_{0}^{\infty}d\xi'\sin(k\xi)\sin(k\xi')\psi(\xi')E_{\alpha,1}(-D|k|^\beta\tau^\alpha).$$

Таким образом, искомое решение $T_1(\xi,\tau)$ задается выражением

$$T_1(\xi,\tau)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}dk\int\limits_{0}^{\infty}d\xi'\psi(\xi')\sin(k\xi)\sin(k\xi')E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha).$$

Для определения $T_2(\xi,\tau)$ используя принцип Дюамеля, получим

$$T_2(\xi,\tau)=\frac{2D}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}dk\int\limits_{0}^{\tau}d\tau'\frac{\sin(k\xi)}{k^{1-\beta}}\mu(\tau-\tau')\cdot\tau'^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-Dk^\beta\tau'^\alpha).$$

Окончательно искомое решение задачи принимает вид

$$T(\xi,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\int_0^\infty d\xi'\psi(\xi')\sin(k\xi)\sin(k\xi')E_{\alpha,1}(-Dk^\beta\tau^\alpha)+$$

$$+\frac{2D}{\pi}\int_0^\infty dk\int_0^\tau d\tau'\frac{\sin(k\xi)}{k^{1-\beta}}\mu(\tau-\tau')\cdot\tau'^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-Dk^\beta\tau'^\alpha).$$

Для рассмотрения задачи без начальных условий необходимо совершить предельный переход $\tau_0\to-\infty$. Будем считать, что функция $T(\xi,\tau_0)$ имеет следующую асимптоту $\lim\limits_{\tau_0\to-\infty}T(\xi,\tau_0)\to A\xi$. Такое поведение функции означает, что исходным состоянием является наличие градиента температуры в поверхностных слоях земли. Величина А есть значение изотермического градиента температуры.

Отметим, что обычно считают, что $\lim\limits_{\tau_0\to-\infty}T(\xi,\tau_0)\to 0$ и, строго говоря, градиентный член в решении задачи без начальных условий отсутствует [109]. В качестве граничного условия примем условие на $T(0,\tau=\mu(\tau)=T_0\cos(\Omega\tau)$, где T_0- амплитуда изменения температуры на поверхности земли, Ω - безразмерная частота колебаний температуры. Для начала рассмотри случай

Решение задачи (1) при этом имеет вид:

$$T(\xi,\tau)=A\xi+T_o\frac{4}{\beta\pi}\left\{\cos(\Omega\tau)\cdot I_1(\Omega,\xi)+\cos(\Omega\tau-\frac{\pi\alpha}{2})\cdot I_2(\Omega,\xi)\right\},\text{ где} \qquad (3.2)$$

$$I_1(\Omega,\xi)=\int_0^\infty\sin\left(\xi\cdot\sqrt[\beta]{\frac{\Omega^\alpha z^2}{a^2}}\right)\frac{z^3}{z^4+2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cdot z^2+1}dz,$$

$$I_2(\Omega,\xi)=\int_0^\infty\sin\left(\xi\cdot\sqrt[\beta]{\frac{\Omega^\alpha z^2}{a^2}}\right)\frac{z}{z^4+2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cdot z^2+1}dz.$$

Решение (2) при $\beta=2$ переходит в раннее рассмотренное нами решение, в котором учитывается нелокальность по времени [108]

$$T(\xi,\tau)=\tilde{T}_0\exp\left(-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\cdot\cos(\pi\alpha/4)\right)\cdot\cos\left(\Omega\tau-\xi\sqrt{\Omega^\alpha/D}\cdot\sin(\pi\alpha/4)\right) \quad (3.\ 3)$$

Заметим, что решение (2) при значениях параметра нелокальности по времени $\alpha=1$ и по координате $\beta=2$ и равенства нулю первого слагаемого переходит в известное решение [109].

$$T(\xi,\tau)=\tilde{T}_0\exp\left(-\xi\sqrt{\Omega/2D}\right)\cdot\cos\left(\Omega\tau-\xi\sqrt{\Omega/2D}\right)$$

Рассмотрим случай $\alpha=1,\beta\to1$, тогда решение (2) принимает вид

$$T(\xi,\tau)=A\xi+T_o\frac{4}{\pi}\left\{\cos(\Omega\tau)\cdot I_1(\Omega,\xi)+\cos(\Omega\tau-\frac{\pi\alpha}{2})\cdot I_2(\Omega,\xi)\right\}$$

$$I_1(\Omega,\xi)=\int_0^\infty \sin\left(\xi\cdot\frac{\Omega z}{a^2}\right)\frac{z^3}{z^4+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot z^2+1}dz,$$

$$I_2(\Omega,\xi)=\int_0^\infty \sin\left(\xi\cdot\frac{\Omega z}{a^2}\right)\frac{z}{z^4+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot z^2+1}dz.$$

При расчете последних интегралов, используя результаты

$$\int_0^\infty \frac{k\sin(\xi k)}{\Omega^2+(Dk)^2}=\frac{\pi}{2D^2}\exp\left(-\frac{\xi\Omega}{D}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\xi k)}{\Omega^2+(Dk)^2}=\frac{D}{2\Omega}\left(\exp(-\xi\frac{\Omega}{D})\cdot Ei\left(\frac{\xi\Omega}{D}\right)-\exp\left(\xi\frac{\Omega}{D}\right)\cdot Ei\left(-\frac{\xi\Omega}{D}\right)\right),$$

окончательно получим следующий результат:

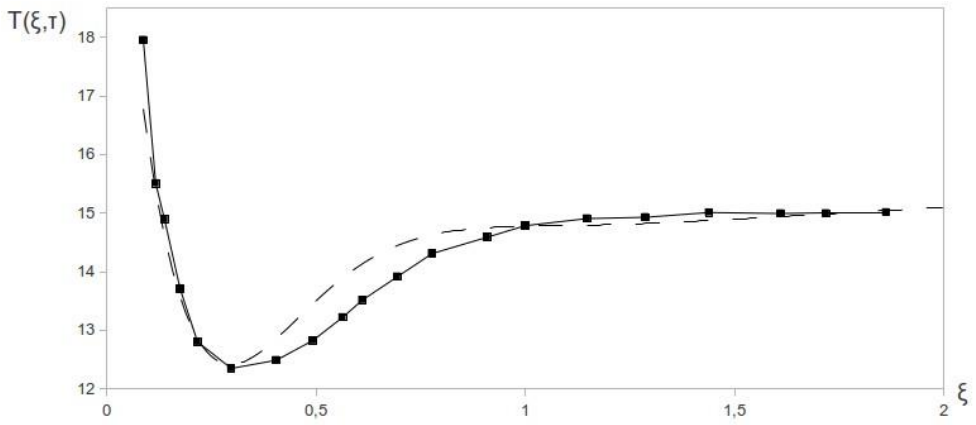
$$T(\xi,\tau)=A\xi+T_0\left\{\exp\left(-\frac{\xi\Omega}{D}\right)\cos(\Omega\tau)+\frac{1}{\pi}\left[\exp\left(-\frac{\xi\Omega}{D}\right)\cdot Ei\left(\frac{\xi\Omega}{D}\right)-\exp\left(\frac{\xi\Omega}{D}\right)\cdot Ei\left(-\frac{\xi\Omega}{D}\right)\right]\sin(\Omega\tau)\right\}.$$

Здесь $Ei(x)$ – интегральная показательная функция.

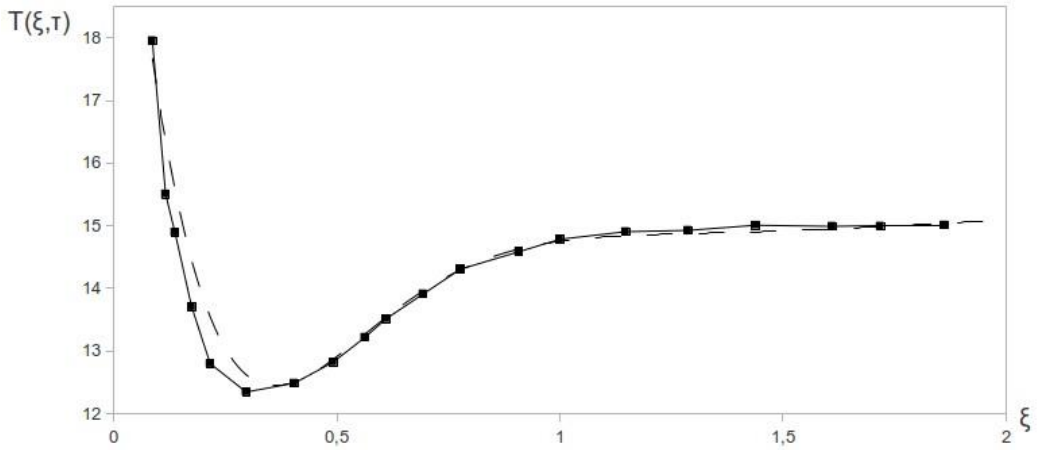
Для остальных значений α,β необходимо использовать численные расчеты по формуле (3.2).

На рис. 3.1 приведены экспериментальные кривые и теоретически кривые для различных значений температуропроводности. Экспериментальная кривая (сплошная линия) соответствуют результатам режимных наблюдений на геотермической станции г. Избербаш. Как видно совпадение экспериментальных и расчетных данных достигается при различных значениях температуропроводности. Можно разделить три участка по глубине с различными значениями температуропроводности, когда достигается совпадением экспериментальных и расчетных значений температуропроводности. Такое поведение значения температуропроводности связано с разными состояниями поверхностных слоев (состав, влагонасыщенность и т .д.).

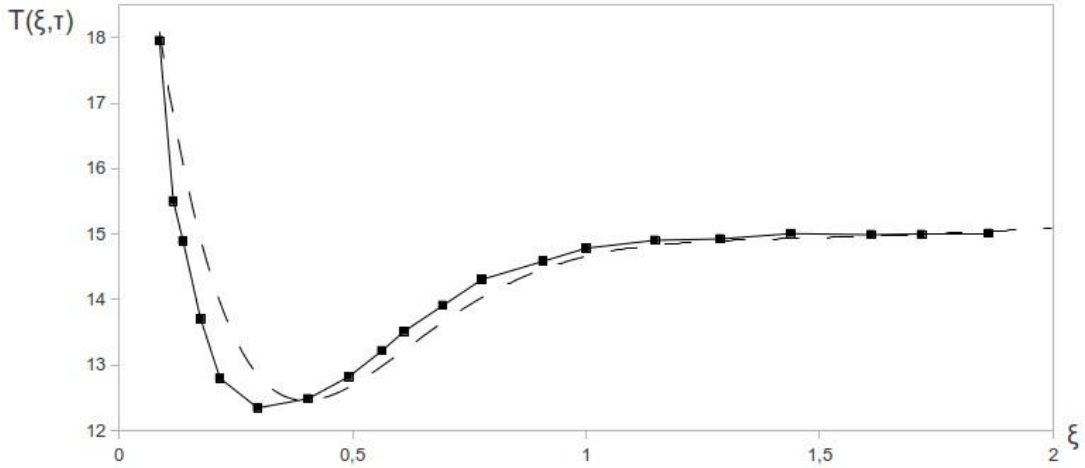
Значение характерного параметра координаты x_0 в определении безразмерной координаты $\xi=x/x_0$ равно $x_0=10$м, поскольку рассматриваются годичные колебания, t_0 равен году. Таким образом, для температуропроводности имеем $a=D\cdot x_0^2/t_0=D\cdot 3.17\cdot 10^{-6}$ м^2/с.



а) Экспериментальные и расчетные данные распределения температуры для случая $\alpha = 1, \beta = 2$.Точечная – эксперимент (г. Избербаш 10.05.1959 г), пунктирная – $D = 0.6$



б) Экспериментальные и расчетные данные распределения температуры для случая $\alpha = 1, \beta = 2$.Точечная – эксперимент (г.Избербаш 10.05.1959 г), пунктирная – $D = 0.9$.



в) Экспериментальные и расчетные данные распределения температуры для случая $\alpha = 1, \beta = 2$.Точечная – эксперимент (г.Избербаш 10.05.1959 г), пунктирная – $D = 1.1$

Рис.3.1.

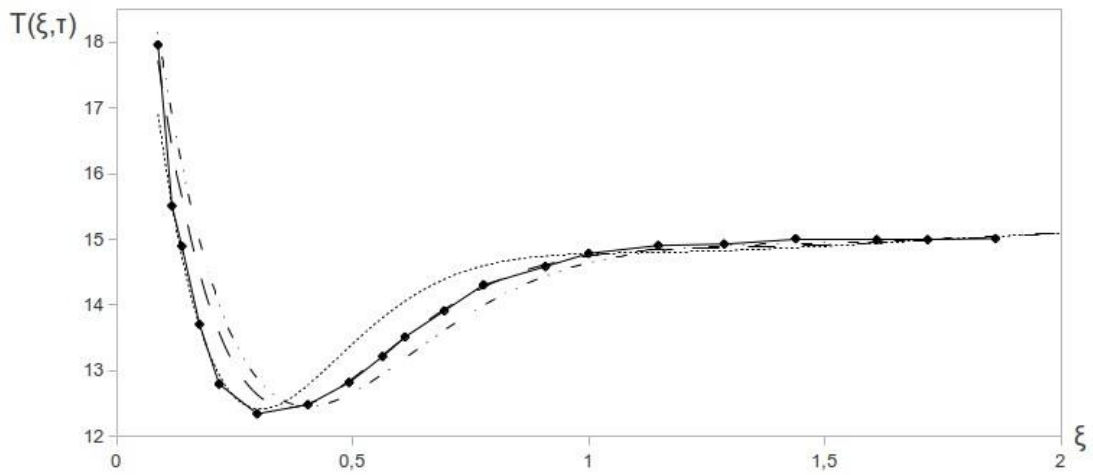


Рис.3.2. Экспериментальные и расчетные данные распределения температуры для случая $\alpha = 0.75, \beta = 2$. Точечная – эксперимент (г.Избербаш 10.05.1959 г), мелкий пунктир – $D = 0.45$, штрих – $D = 0.65$ штрих пунктирная – $D = 0.8$

Как следует из рисунка, температуропроводность меняется с глубиной следующим образом. В глубинах $0 < x < 3м$, $a = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; в глубинах $3м < x < 10м$ - $a = 2.85 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; в глубинах $10м < x < 18м$, $a = 4.48 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. $1{,}9 \cdot 10^{-6} м^2 / с < a < 4.5 \cdot 10^{-6} \cdot м^2 / с$.

Таким образом, расчетные значения температуропроводности меняется в пределах $1{,}9 \cdot 10^{-6} м^2 / с < a < 4.5 \cdot 10^{-6} \cdot м^2 / с$. Однако, экспериментально измеренные значения температуропроводности поверхностных слоев состоящие из песчаника, согласно [110] меняются в пределах $0{,}9 \cdot 10^{-6} м^2 / с < a < 2.0 \cdot 10^{-6} \cdot м^2 / с$.

На рисунках 3.2 приведены аналогичные кривые для значений параметров нелокальности $\alpha = 0.75, \beta = 2$.

Как видно в случае, когда $\alpha = 0.75, \beta = 2$ имеем: при $0 < x < 3м$, $a = 0.8 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; в глубинах $3м < x < 10м$ - $a = 1.5 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; в глубинах $10м < x < 18м$, $a = 2.35 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Эти данные удовлетворительно совпадают с измеренными значениями температуропроводности песчаника.

Таким образом, анализ экспериментальных данных по измерению распределения температуры в поверхностных слоях земли (до нейтрального слоя) показывает, что расчетные значения температуропроводности определяемые решением уравнения теплопроводности совпадают с экспериментально измеренными данными при использовании решений нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени. Для рассматриваемой скважины они составляют $\alpha = 0.75, \beta = 2$. Это означает, что при рассмотрении задач теплопереноса возможно

исходить из нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка. Общий характер зависимости значений температуропроводности от параметров нелокальности для рассматриваемого случая следующий: при уменьшении параметра нелокальности по времени значения температуропроводности уменьшается, при уменьшении параметра нелокальности по координате значения температуропроводности увеличивается. [18]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенность предлагаемого обобщения равновесной термодинамики на основе ДИ заключается в наличие дополнительного параметра – ППДП по ТП, которая позволяет теоретически рассчитать значения ТХ на основе полученного уравнения состояния.

Исходя из выражения для статистической суммы, можно вывести ОУС и получить аналитические выражения для ТХ вещества. На основе экспериментально измеренных значений P,V,T и полученного «фрактального» уравнения состояния (ФУС) можно определить значение ППДП по ТП и далее рассчитать ТХ на основе полученных аналитических выражений. Как показывают проведенные нами расчеты, результаты удовлетворительно соответствуют экспериментально измеренным данным.

Отметим, что переход к производным дробного порядка в действительности не формальный переход. В настоящее время нет ясного физического смысла ППДП по ТП, что требует проведения дальнейших фундаментальных исследований. Ниже приведем возможную интерпретацию перехода к производным дробного порядка. Переход от обычных производных к производным дробного порядка представляет собой один из способов учета принципа локального неравновесия, когда в термодинамический процесс дают существенный вклад флуктуации ТП, т.е. не выполняется распределение Больцмана–Гиббса. Действительно, как видно из определения производной дробного порядка в термодинамический процесс дают вклад состояния с различными значениями термодинамического параметра, по которым осуществляется операции дробного дифференцирования. Прямого доказательства появления производных дробного порядка по ТП при учете нелокальности интеграла столкновений по времени и импульсов в настоящее время нет. Заметим, еще раз, что появление степенных распределений свидетельствуют о важной роли флуктуаций в термодинамическом процессе и переход к производным дробного порядка представляется как способ учета вклада этих флуктуаций в термодинамический процесс. Таким образом, по своему физическому смыслу переход к производным дробного порядка по термодинамическим параметрам представляет собой способ учета принципа локального неравновесия, когда термодинамический процесс происходит в условиях больших флуктуаций. Т.е. переход от одного равновесного состояния в другое происходит не через множество равновесных состояний системы, а вклад дают флуктуации и неравновесные состояния, которые не успевает полностью релаксировать к равновесному состоянию. Мерой учета флуктуаций становится ППДП.

Основные результаты выполнения темы к 2018 г. могут быть охарактеризованы как:

1. Дано обобщение равновесной и неравновесной термодинамики на основе дробного исчисления.

2. Используя обобщение термодинамики в формализме производных дробного порядка, получено однопараметрическое «фрактальное» уравнение состояния, на основе которого в широком диапазоне температур и давлений рассчитаны теплофизические свойства инертных газов (неона, аргона, ксенона и криптона), воды (включая линию насыщения) и фреона R409B (по воде и многокомпонентным веществам см. отчет за 2017).

3. На основе экспериментальных измерений, проведенных стационарным методом, получены данные о влиянии температуры и гидростатического давления на теплопроводность образцов песчаника и керамики.

4. Исследована задача Стефана в обобщении для фрактальных сред с применением аппарата производных дробного порядка Капуто по времени. Построена разностная схема. Разработан алгоритм и создана программа численного решения с оператором дробного дифференцирования. Оценены функциональные зависимости движения межфазной границы для обобщенного условия Стефана от значения показателя производной дробного порядка. (См. отчет за 2017.)

5. Анализ экспериментальных данных по измерению распределения температуры в поверхностных слоях земли (до нейтрального слоя) показал, что расчетные значения температуропроводности определяемые решением уравнения теплопроводности совпадают с экспериментально измеренными данными при использовании решений нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка по времени. Для рассматриваемой скважины они составляют $\alpha=0.75$, $\beta=2$. Это означает, что при рассмотрении задач теплопереноса необходимо исходить из нелокального уравнения теплопроводности в производных дробного порядка. Общий характер зависимости значений температуропроводности от параметров нелокальности для рассматриваемого случая следующий: при уменьшении параметра не локальности по времени значения температуропроводности уменьшаются, при уменьшении параметра нелокальности по координате значения температуропроводности увеличиваются.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике – М.: Гостехиздат, 1946. – 123 с.
2. Хилл Т. Статистическая механика – М.: ИЛ. 1960. – 486 с.
3. Соболев С.Л. Локально-неравновесные процессы переноса // Успехи физических наук. –1997. – Т. 167, №10. – С. 1095–1106.
4. Abe S. Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications // Series lecture Notes in Physics / S., Y. Ohamoto – Berlin, New York, Heidelderg: Springer-Verlag, 2001. – 277 p.
5. Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. - Казань: Издательство «Фэн», 2002. – 250 с.
6. Sugiyama M. Nonadditive Entropy and Nonextensive Statistical Mechanics // Continuum Mechanics and Thermodynamics Heidelberg: Springer-Verlag. – 2004. – Vol. 16. – P. 221-304.
7. Суханов А.Д. К квантовому обобщению равновесной статистической термодинамики / А.Д. Суханов // Теоретическая и математическая физика. – 2008. – Т 135, №1. – С. 183–196.
8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
9. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., and Aliverdiev A. Generalization of Thermodynamics in fractional order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2018. – Vol. **133**. – No. 2. – 1189-1194. – doi: 10.1007/s10973-018-7024-2
10. Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P., Paixão L.S., Reis M.S., Oscillating magnetocaloric effect in quantum nanoribbons // Physica E Low-dimensional Systems and Nanostructures **65** (2015) 44-50, doi:10.1016/j.physe.2014.08.012
11. Meilanov R.P., Shabanova M.R., Akhmedov E.N. Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus // Chaos, Solitons & Fractals **75** (2015) 29-33, doi:10.1016/j.chaos.2015.01.024
12. Beibalaev V.D., Shabanova M.R. A finite-difference scheme for solution a fractional heat diffusion-wave equation conditions // Thermal science **19** (2) (2015) 531-536 doi:10.2298/TSCI120418148B
13. Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P. Transport properties of epitaxial graphene formed on the surface of a superconductor // Semiconductors **48** (7) (2014) 924-934 doi:10.1134/S1063782614070021 (Алисултанов З.З., Мейланов Р.П. Транспортные

свойства эпитаксиального графена, сформированного на поверхности полупроводника // Физика и техника полупроводников **48** (7) (2014) 951-962)

14. Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P. Electron heat conductivity of epitaxial graphene on silicon carbide // Technical Physics Letters. – 2016. – Т. 42, № 8. – С. 779-782, doi: 10.1134/S1063785016080022 (Алисултанов З.З., Мейланов Р.П. Электронная теплопроводность эпитаксиального графена на карбиде кремния // Письма в Журнал технической физики. – 2016. – Т. 42. № 15. – С. 19-26)
15. Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P., Nukhov A.K. On the role of lattice defects in the formation of adsorption properties of grapheme // Technical Physics Letters. – 2013. – Volume 39. – Issue 2, 171–174 pp. (Алисултанов З.З., Мейланов Р.П., Нухов А.К. О роли дефектов кристаллической решетки в формировании адсорбционных свойств графена // Письма в Журнал Технической Физики. – 2013. – 39(3), 63)
16. Shabanova M.R. Determination of thermal diffusivity and nonlocalization parameters from experimental data // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2013. – Т. 86. – № 2. – С. 467-470 (Шабанова М.Р. Определение коэффициента температуропроводности и параметров нелокальности по экспериментальным данным // Инженерно-физический журнал. –2013. – Т. 86. – № 2. – С. 439-442)
17. Alisultanov Z.Z., Meilanov R.P. On the theory describing graphene in an anomalous-dispersion region // Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2013. – Т.7. – № 1. – С. 46-50. (Алисултанов З.З., Мейланов. Р.П. К теории описания графена в области аномальной дисперсии // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2013. – № 1. – С. 50.)
18. Shabanova M.R., R.P. Meilanov., Meilanov R.R., E.N. Akhmedov. Determining the thermal diffusivity of sediments using the fractional nonlocal heat conduction equation // Izvestiya Physics of the Solid Earth **51**(1) (2015) 80-86, doi:10.1134/S106935131405005X (Шабанова М.Р., Мейланов Р.П., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н. Определение коэффициента температуропроводности осадочных пород на основе нелокального уравнения теплопроводности в дробном исчислении // Физика земли. – № 1 (2015) 83-89)
19. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A. To the fractal equation of state // Journal of Physics: Conference Series. – 2017, **891**, 012331 doi:10.1088/1742-6596/891/1/012331
20. Emirov S.N., Beybalaev V.D., Gadzhiev G.G., Ramazanova A.E., Amirova A.A. and Aliverdiev A.A. To the description of the temperature and pressure dependences of the

thermal conductivity of sandstone and ceramics // 2017. – **891**, 012335 doi :10.1088/1742-6596/891/1/012335

21. Meilanov R.R. Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., Ragimkhanov G.B., Aliverdiev A.A. To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018, **946**, 012076, doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012076
22. Magomedov R.A., Meilanov R.P., Akhmedov E.N. and Aliverdiev A.A. Calculation of multicomponent compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order // Journal of Physics: Conference Series. – 2016, **774**, 012025 (doi:10.1088/1742-6596/774/1/012025)
23. Meilanov R.P., Magomedov R.A. Thermodynamics in Fractional Calculus // Journal of Engineering Physics and Thermophysics **87**(6) (2014) 1521-1531, doi:10.1007/s10891-014-1158-2 (Мейланов Р.П., Магомедов Р.А. Термодинамика в дробном исчислении // Инженерно-физический журнал **87**(6) (2014) 1455-1465)
24. Бейбалаев, В.Д., Аливердиев А.А., Магомедов Р.А. и др. Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 21. – № 2. – С. 376-387.
25. Magomedov, R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D. and Aliverdiev A. Generalization of Thermodynamics in fractional order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2018. – Vol. **133**. – No. 2. – 1189-1194.
26. Akhmedov E.N. Molybdenum lattice properties at high pressure // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 2018. – Vol. **121**. – P. 62–66.
27. Emirov, S.N, Beybalaev V.D., Ramazanova A.E., Davudov I.A., Amirova A.A. and Aliverdiev A. Temperature and Baric Patterns of Changes in the Thermal Conductivity of Composite Materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2018. – Vol. **82**. – No. 7. – P. 888–891.
28. Meilanov, R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., Ragimkhanov G.B. and Aliverdiev A. To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. **946**, 012076.
29. Aliverdiev A., Batani D., Benocci R. et al. About laser shocks dynamics for complex focal spots and structured targets // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – Vol. **946**. – 012013.
30. Эмиров, С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., и Аливердиев А. О температурных и барических закономерностях изменения

теплопроводности композитных материалов // Известия РАН, Серия Физическая. – 2018. – Т. **82**. – № 7. – С. 142–145.

31. Магомедов, Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. К расчету теплофизических характеристик ксенона // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. Межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 10. – Тверь. – 2018. – С. 446-452.
32. Эмиров С.Н., Бейбалаевм, Рамазанова А.Э., Гаджиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. – №5(103). – 2017. – С. 52-66.
33. Алисултанов З.З., Мейланов Р.П., Мусаев Г.М., Халилова А.Х. Слабо фрактальный квантовый осциллятор // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. – 2014. – № 6. – С. 12-18.
34. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик аргона // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32,** No. 1, 2017, 6-11, doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-6-11
35. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик воды // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки, **32**. No. 4. 2017, 63-69 doi: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-63-69
36. Магомедов Р.А., Мейланов Р.П. Расчет энтропии и теплоемкости аргона // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко. – 2013. – С. 188-191.
37. Шабанова М.Р., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.П. Интерпретация распределения температуры осадочных пород на основе уравнения теплопроводности в производных дробного порядка // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко. – 2013. – С. 277-283.
38. Магомедов Р.А., Мейланов Р.П. Расчет энтропии и теплоемкости аргона // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко. – 2013. – С. 188-191.

39. Мейланов Р.П., Пирилаев А.А. Численные методы решения нелинейного уравнения теплопроводности в производных дробного порядка // Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко. – 2013. – С. 350-353.
40. Р.П. Мейланов., Шабанова М.Р. Концепция фрактала и дробное исчисление // В сборнике: Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов материалы VI Школы молодых ученых им. Э.Э. Шпильрайна. редколлегия: А.Б. Алхасов, Д.Н. Кобзаренко. – 2013. – С. 77-83.
41. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности неизотермической фильтрации с учетом эффектов памяти и пространственных корреляций // В сборнике: Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы Материалы Научной сессии Института проблем геотермии, посвященной Дню российской науки. Редакционно-издательский совет: д.т.н. Алхасов А.Б., д.т.н. Алишаев М.Г., д.т.н. Базаев А.Р., к.х.н. Каймаразов А.Г., д.т.н. Кобзаренко Д.Н., д.ф.-м.н. Мейланов Р.П., д.ф.-м.н. Рамазанов М.М. – 2014. – С. 96-99.
42. Мейланов Р.П., Магомедов Р.А. Расчет теплофизических параметров хладагента r409b на основе фрактального уравнения состояния // В сборнике: Возобновляемая энергетика: Проблемы и перспективы Материалы Научной сессии Института проблем геотермии, посвященной Дню российской науки. Редакционно-издательский совет: д.т.н. Алхасов А.Б., д.т.н. Алишаев М.Г., д.т.н. Базаев А.Р., к.х.н. Каймаразов А.Г., д.т.н. Кобзаренко Д.Н., д.ф.-м.н. Мейланов Р.П., д.ф.-м.н. Рамазанов М.М. – 2014. – С. 111-114.
43. Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.П. Особенности решения задачи коши для нелокальной неизотермической фильтрации в дробном исчислении // В сборнике: Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы. Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов Материалы III международной конференции и VII Школы молодых ученых имени Э.Э. Шпильрайна, Махачкала, 6-8 октября 2014 г.. редколлегия: А.Б. Алхасов, А.Г. Каймаразов, Д.Н. Кобзаренко, Р.П. Мейланов, М.М. Рамазанов. – 2014. – С. 144-147.
44. Мейланов Р.П. Физические аспекты дробного исчисления. // Вып.4. Материалы III международной конференции «Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы» и VII Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э.Шпильрайна. 6-8 октября 2014 г. /

Под ред. д.т.н. А.Б.Алхасова. – Махачкала: ИП Овчинников (АЛЕФ). – 2014г. С.27-31.

45. Мейланов Р.П. Термодинамика в дробном исчислении и его приложения к задачам геотермии // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. Махачкала. Выпуск 5. – Т. 1. – 2015. – С. 48-63.
46. Магомедов Р.А. Фрактальное уравнение состояния и расчет теплофизических характеристик сложных веществ. // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. Махачкала. Выпуск 5. – Т. 1. – 2015. – С. 310 –313.
47. Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р. Особенности распределения температуры и давления в пласте при нелокальной неизотермической фильтрации // Труды IV Международной конференции «Возобновляемая энергетика. Проблемы и перспективы», посвященной 35-летию Института проблем геотермии ДНЦ РАН. – Махачкала. Выпуск 5. – Т. 1. – 2015. – С. 314-218.
48. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Определение теплофизических свойств одноатомных газов // Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, информатики и современной науки: теория и практика актуальных исследований», посвященной 80-летию профессора Магомедова К. М. – Махачкала. – 2016. – С. 157-159
49. Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Ахмедов Э. Н., Мейланов Р.Р., Магомедов Р.А. Численное исследование процессов теплообмена во фрактальных средах за счет конвекции и излучения на границе // Материалы Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики, информатики и современной науки: теория и практика актуальных исследований», посвященной 80-летию профессора Магомедова К. М. – Махачкала. – 2016. – С. 67-71.
50. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Мейланов Р.П., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. К выводу фрактального уравнения состояния многокомпонентных систем // Материалы тезисов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа информатики». – Терскол 17 – 21 октября 2016 г. – С. 186-188

51. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Магомедов Р.А. Численное решение краевой задачи для системы уравнений нелокальной неизотермической фильтрации // Материалы тезисов Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа информатики». – Терскол 17 – 21 октября 2016 г. – С. 218-221.
52. Magomedov R.A., Meilanov R.P., Akhmedov E.N. and Aliverdiev A.A. About application of derivatives of fractional order to taking into account the principle of local disequilibrium // Book of Abstracts of XXXI International Conference on Equations of State for Matter. – March 1-6. – 2016. – Elbrus, Moscow & Chernogolovka & Nalchik. – 2016. – P. 85, ISBN 978-5-7558-0567-4
53. Аливердиев А.А., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Магомедов Р.А., Мейланов Р.П., Мейланов Р.Р. К анализу термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния // Тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». – (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 г.), Владикавказ. – 2016. – с. 47-48
54. Аливердиев А.А., Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.Р., Назаралиев М.А. Обобщенный нелинейный осциллятор Дуффинга // Тезисы докладов XIII Международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». – (пос. Дивноморское, 7-14 сентября 2016 г.), Владикавказ. – 2016. – с. 141-142
55. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. К расчету термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере водяного пара. // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». – Кабардино-Балкарская Республика. – Терскол, 17 – 21 мая 2017 г. – стр. 136-137.
56. Магомедов Р.А. Расчет теплофизических характеристик воды в дробном исчислении // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы". – 23-26 октября 2017 г. – Т.1. – стр. 305-307.
57. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. К расчету термодинамических характеристик воды на основе фрактального уравнения состояния // Материалы XII Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева. – стр. 155-156.

58. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. К фрактальному уравнению состояния, Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики» // Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт». – Москва. – 9-11 октября 2017 г. – ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2). – стр. 316-318.
59. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Гаджиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А. Температурные и барические закономерности изменения теплопроводности песчаника и керамики // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика”. – 29 мая –2 июня 2017. – Великий Новгород. – стр. 364-365.
60. С.Н. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Материалы XX Междисциплинарный, Международный Симпозиум “Упорядочение в минералах и сплавах”, ОМА-20. – 10-15 сентября 2017г. – Ростов-на-Дону – п. Южный. – с. 276-279.
61. Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Гаджиев Г.Г. К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности мергеля // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». – Кабардино-Балкарская Республика, Терскол. – 17 – 21 мая 2017 г. – стр. 46-47.
62. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Ибрагимов О.И., Аливердиев А.А. Тепловые свойства минерального вещества в термобарических условиях литосферы // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы". – 23-26 октября 2017 г. – Т. 2. – стр. 152-155.
63. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А. // К описанию температурной и барической зависимости теплопроводности керамики и песчаника. Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики». – Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт». – Москва, 9-11 октября 2017 г. – ISBN 978-5-383-01233-8 (Том 2). – с. 334-335.
64. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Галжиев Г.Г., Рамазанова А.Э., Малиева Ф.Ф. Расчет теплопроводности песчаника в зависимости от давления // Материалы XII Международной научной конференции

«Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». – Приуроченная к 85-летию профессора М.Г. Алишаева. – стр. 230-232.

65. Аливердиев Р.А., Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н. Расчет термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния на примере воды // Сборник докладов Седьмой Международной научной конференции “Химическая термодинамика и кинетика”. – 29 мая –2 июня 2017. – Великий Новгород. – стр. 7-10.
66. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A. EOS calculation for Ar and water with the application of fractional order derivatives // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. – March 1-6. – 2017. – Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia. – Section 3. Equations of State for Matter. – P. 83.
67. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Aliverdiev A.A. About the generalization of thermodynamics in fractional order derivatives // Abstracts of XXI International Conference on Chemical Thermodynamics in Russia (RCCT 2017) and School Conference on Chemical Thermodynamics for Young Scientists. – June 26-30, 2017. – Akademgorodok, Novosibirsk, Russia (2017). – P.85.
68. Бейбалаев В.Д., Назаралиев М.А., Аливердиев А.А., Малиева Ф.Ф. О численном исследовании краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с дробными производными // Материалы V Международной конференции "Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы". – 23-26 октября 2017 г. – Т.1. – стр. 263-265.
69. Арсланбекова Р.Б., Омаров И.О., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А. Об особенностях в фазовой плоскости обобщенной нелинейной системы Дуффинга // Материалы Международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах». – Том 1. – Пермь 2017. – стр. 38-41
70. Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Ragimkhanov G.B., Magomedov R.A., Meilanov R.P., Aliverdiev A.A. Application of fractional calculus for local non-isothermal filtration // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. – March 1-6, 2017. – Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia. – Section 2. Shock Waves, Detonation and Combustion. P. 127.
71. Aliverdiev A.A., Meilanov R.P., Meilanov R.R., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., M.-Sh.A. Nazaraliev, Akhmedov E.N. About the application of fractional calculus to the nonequilibrium process dynamics // Proc. of TMB-2017 (Turbulent Mixing and Beyond, Sixth International Conferenceб Tenth Anniversary Program), Abstracts/ – 14 – 18

August, 2017, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Strada Costiera 11. – Trieste, Italy. – p. 77

72. Aliverdiev A.A., Batani D., Amirova A.A., Benocci R., Dezulian R., Krousky E., Pfeifer M., Ullschmied J., Skala J., Jakubowska K. About laser shocks dynamics for complex spot and structured targets // Abstracts of XXXII International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter. – March 1-6, 2017 –Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Section 1. Power Interaction with Matter. P 36.
73. Эмиров, С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Давудов И.А. и Аливердиев А. К описанию температурно-барической зависимости теплопроводности горных пород и композитных материалов // Материалы Седьмой Российской Национальной конференции по теплообмену (РНКТ-7), Москва. – 2018. – № 199. – 4 с.
74. Эмиров, С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Аливердиев А. и Алхасов Ш.М. К описанию температурно-барической зависимости теплопроводности кальтицизированного окварцованного андезита // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала, 2018. – С. 154-157.
75. Бейбалаев, В.Д., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Назаралиев М.Ш., Магомедов Р.А. и Аливердиев А. К численному моделированию нелокальной неизотермической фильтрации во фрактальных средах // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 157-159.
76. Магомедов, Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. К расчету теплофизических характеристик ксенона, используя уравнение состояния в дробном исчислении // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 151-154.
77. Аливердиев А.А. К экспериментальным исследованиям экстремальных состояний углерода // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна, Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 372-374
78. Ахмедов Э.Н. Решёточные свойства молибдена при высоких давлениях // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала, 2018. – С. 397-404.

79. Ахмедов Э.Н. О параметрах парного межатомного потенциала для молибдена // В сборнике: Химическая термодинамика и кинетика, сборник научных трудов VIII Международной научной конференции. – Тверь. – 2018. – С. 47-48.
80. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. Расчет теплофизических характеристик ксенона // В сборнике: Химическая термодинамика и кинетика, сборник научных трудов VIII Международной научной конференции. – Тверь. – 2018. – С. 224-225.
81. Batani D., Jakubowska K. Jakubowska, Sakaki T., Trela J., Benocci R., Neumayer P., Rosmej O.N., Verona C. and Aliverdiev A. Carbon in the megabar pressure range: New experiment and calculations // Book of Abstracts of XXXIII International Conference on Equations of State for Matter March 1–6, 2018, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Russian Academy of Sciences – Joint Institute for High Temperatures RAS – Institute of Problems of Chemical Physics RAS – Kabardino-Balkarian State University. – Moscow & Chernogolovka & Nalchik. – 2018. – P. 53
82. Эмиров С.Н., Рамазанова, Д.К. Джаватов, Бейбалаев В.Д., Амирова А.А., Давудов И.А. и Аливердиев А. Экспериментальные и теоретические исследования коэффициента эффективной теплопроводности горных пород в условиях высоких давлений и температур // Тезисы докладов II Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы исследования нефтегазовых пластовых систем» (SPRS-2018) . – Москва. – Газпром ВНИИГАЗ. – 2018. – С. 76.
83. Аливердиев А.А. Взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом: эксперимент и моделирование // X Всероссийской конференции по физической электронике (ФЭ-2018) . – Махачкала. – 2018.
84. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. Расчет теплофизических свойств криптона и ксенона на основе фрактального уравнения состояния // Материалы XV Российской конференции (с международным участием) по теплофизическим свойствам веществ (РКТС-15). – Москва. – 2018.
85. Магомедов Р.А. Применение дробного исчисления для расчета теплофизических характеристик криптона // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». – Кабардино-Балкарская Республика, Эльбрус. – 22 – 26 мая 201 Ахмедов, Э.Н. Размерная зависимость температуры плавления молибдена / Э.Н. Ахмедов // Тезисы докладов Кластера конференций 2018 (XIII Международная научная конференция «Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах», X Международная научная конференция «Кинетика и механизм кристаллизации, Кристаллизация и материалы

нового поколения» Международный симпозиум «Умные материалы») и Летней школы-конференции молодых ученых «Моделирование умных материалов», 1-6 июля 2018. – Суздаль. – С. 247-248.8. – С. 166.

86. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Амирова А.А. и Аливердиев А. Закономерности изменения теплопроводности керамики в условиях высоких давлений и температур // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 22 – 26 мая 2018. – С. 292.
87. Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Якубов А.З. Численное исследование процессов теплопереноса в горных породах // Материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», 4–7 декабря 2018. – Нальчик. – С. 4.
88. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение – М. Физматлит. – 2003. – 272 с.
89. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Наука. – 1964. – 568 с.
90. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. – 1981. – 800 с.
91. Мейланов Р.П. Обобщенное уравнение одномерной фильтрации с дифференцированием дробного порядка – *Инженерно-физический журнал.* – 2001. – Т.74. – № 2. – С. 34-37.
92. Зубарев В. Н., Козлов А. Д., Кузнецов В.М. и др. Теплофизические свойства технически важных газов при высоких температурах и давлениях: Справочник – М.: Энергоатомиздат. – 1989. – 232 с.
93. Dobbins R.A., Mohammed K., Sillivan D.A.//J. Phys. Chem. Ref. Data. – 1988. – V.17. – №1. – P 1.
94. Григорьев И.С., Мелихов Е.З. Физические величины: Справочник – М.: Энергоатомиздат. – 1991. – 316 с.
95. Эйзенберг Д., Кауцман В., Структура и свойства воды. // Перевод с англ. Под редакцией Богородского В. В. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1975. – 280 с.
96. Вукалович М.П. Теплофизические свойства воды и водяного пара. – М.: Машиностроение. – 1967. – 160 с.
97. Глушко В.П. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. //Справочник. – Москва: Наука. – 1978.

98. программа расчета данных REFPROP Национального института стандартов и технологий США
99. Eucken A. Über die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit fester Nichtmetalle. / A. Eucken // Ann. d. Phys. – 1911. – V. 339. – Issue 2, P. 185-221
100. Debye P., Nernst W., Smoluchowski M., et al. Vorträge über die Kinetische Theorie der Materie und Electricitat. Berlin: B.G. Teubner. 1914. 196 p.
101. Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов.– М.: Физматгиз. – 1963. – 121 с.
102. Abdulagatov I.M., Emirov S.N., Gairbekov K. A. Effect temperature and pressure on thermal conductivity of sandstone // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2009. V. 46(6) P. 1055-1071
103. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Известия РАН, Серия Физическая. – 2018. – Т. 82. – № 7. – С. 142–145 doi: 10.1134/S0367676518070177
104. Emirov S.N., Beybalaev V.D., Gadzhiev G.G., Ramazanova A.E., Amirova A.A. and Aliverdiev A.A. To the description of the temperature and pressure dependences of the thermal conductivity of sandstone and ceramics // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 891. 012335
105. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Гаджиев Г.Г., Амирова А.А., Аливердиев А.А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности горных пород // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. – 2017. – Т. 103. – №5. – С. 52-66
106. Рамазанова А.Э., Эмиров С.Н. Влияние давления на температурную зависимость теплопроводности полупроводников и горных пород // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17. – № 19. – С. 169-171.
107. Магомедов Я.Б., Эмиров С.Н., Рамазанова А.Э. Барическая зависимость теплопроводности полупроводникового соединения $GdGeAs_2$ [Электронный ресурс] // Электронный журнал. 2015. № 1. С. 87. URL: http://pti-nt.ru/ru/issue/publication/81-baricheskaya-zavisimost-teploprovodnosti-poluprovodnikovogo-soedineniya-sdgeas2
108. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // ЖТФ. – 2011. –Т.81. – №7. С. 1–6.
109. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. // М.: Наука, 1972. – 736 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

А.1. ПОЛНЫЙ ДРОБНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОТ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, для функции многих переменных частные производные дробного порядка могут быть определены как (глава 5 работы [66])

$$\frac{\partial^{\alpha} F(x,y)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{F(\xi,y)}{(x-\xi)^{\alpha}} d\xi, \quad (0 < \alpha \le 1) \tag{А.1.1}$$

Это в свою очередь позволяет ввести понятие полного дифференциала дробного порядка для функций многих переменных. Рассмотрим приращение функции от двух переменных $L(x,y)$ как $L(x+\Delta x, y+\Delta y) - L(x,y)$.

Представим его в виде

$$L(x+\Delta x, y+\Delta y) - L(x, y+\Delta y) + L(x, y+\Delta y) - L(x,y) \tag{А.1.2}$$

Разложив $L(x,y)$ в «обобщенный» ряд Тейлора (глава 2 работы [66]) для фиксированного значения y получим:

$$L(x+\Delta x, y+\Delta y) = L(x, y+\Delta y) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} L(x, y+\Delta y) \cdot (\Delta x)^{\alpha+i} + R(x, y+\Delta y) \tag{А.1.3}$$

Аналогично имеем

$$L(x, y+\Delta y) = L(x,y) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} L(x,y) \cdot (\Delta y)^{\alpha+i} + R(x,y) \tag{А.1.4}$$

и

$$L(x+\Delta x, y+\Delta y) - L(x, y+\Delta y) + L(x, y+\Delta y) - L(x,y) = \tag{А.1.5}$$

$$= \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} L(x, y+\Delta y) \frac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} L(x,y) \frac{(\Delta y)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \gamma(x, y+\Delta y) \cdot O\left((\Delta x)^{\alpha}\right) + \gamma(x,y) \cdot O\left((\Delta y)^{\alpha}\right)$$

Определим полный дифференциал дробного порядка как часть приращения (А.1.5) порядка α $(0 < \alpha \le 1)$. В случае $\alpha = 1$ эту часть (линейная по приращению аргументов) называют полным дифференциалом функции от двух переменных.

Так как в выражении (А.1.5) последние две слагаемые бесконечно малые величины более высокого порядка, чем $(\Delta x)^{\alpha}$ и $(\Delta y)^{\alpha}$, совершая предельный переход и введя обозначения $dx^{\alpha} = \dfrac{(dx)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$ и $dy^{\alpha} = \dfrac{(dy)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$, а также для приращения $L(x+\Delta x, y+\Delta y) - L(x, y+\Delta y) + L(x, y+\Delta y) - L(x, y)$ – обозначение $d^{\alpha}L(x, y)$, получим

$$d^{\alpha}L(x, y) = \frac{\partial^{\alpha}L(x, y)}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha} + \frac{\partial^{\alpha}L(x, y)}{\partial y^{\alpha}}dy^{\alpha} \qquad \text{(А.1.6)}$$

При равенстве ППДП единице выражение (А.1.6) переходит в традиционное выражение для полного дифференциала.

Таким образом, для полного дифференциала дробного порядка от функции двух переменных имеет место соотношение (А.1.6).

А.2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ В ДРОБНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Преобразование Лежандра для пары термодинамических переменных, например, для пары термодинамических переменных T, S ,которое имеет вид

$$d(TS) = TdS + SdT \quad . \tag{А.2.1}$$

Для обобщения выражения (А.2.1), на случай производных дробного порядка, исходим из выражения для полного дифференциала дробного порядка от функции двух переменных (1,6).

Для $L(x, y) = xy$ при $x = T$, $y = S$, а также принимая во внимание, результат

$$\frac{\partial^{\alpha}(TS)}{\partial T^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T \frac{t \cdot S}{(T-t)^{\alpha}} dt = \frac{T^{1-\alpha} \cdot S}{\Gamma(2-\alpha)}, \tag{А.2.2}$$

получим следующее обобщение преобразования Лежандра в производных дробного порядка

$$d^{\alpha}(TS) = \frac{T^{1-\alpha} \cdot S}{\Gamma(2-\alpha)} dT^{\alpha} + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^{\alpha} \tag{А.2.3}$$

Аналогично основное термодинамическое соотношение – второе начало термодинамики:

$$dE = -PdV + TdS \tag{А.2.4}$$

может быть приведено к виду:

$$d^{\alpha}E = -\frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^{\alpha} + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^{\alpha} . \tag{А.2.5}$$

Для полного дробного дифференциала потенциала Гельмгольца

$$dF = -PdV - TdS \tag{А.2.6}$$

имеем

$$d^{\alpha}F = -\frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^{\alpha} - \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^{\alpha} \tag{А.2.7}$$

Аналогично:

$$d^{\alpha}H = \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dP^{\alpha} + \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^{\alpha} \qquad \text{(A.2.8)}$$

$$d^{\alpha}G = \frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dP^{\alpha} - \frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dT^{\alpha} \qquad \text{(A.2.9)}$$

Таким образом, соотношения Максвелла, обобщенные на случай ДИ принимают вид

$$\left.\frac{\partial^{\alpha}E}{\partial V^{\alpha}}\right|_{S} = -\frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \left.\frac{\partial^{\alpha}E}{\partial S^{\alpha}}\right|_{V} = \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \text{(A.2.10)}$$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha}F}{\partial V^{\alpha}}\right|_{T} = -\frac{P \cdot V^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \left.\frac{\partial^{\alpha}F}{\partial \mathrm{T}^{\alpha}}\right|_{V} = -\frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \text{(A.2.11)}$$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha}H}{\partial P^{\alpha}}\right|_{S} = -\frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \left.\frac{\partial^{\alpha}H}{\partial S^{\alpha}}\right|_{P} = \frac{T \cdot S^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \text{(A.2.12)}$$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha}G}{\partial P^{\alpha}}\right|_{T} = -\frac{V \cdot P^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \left.\frac{\partial^{\alpha}G}{\partial \mathrm{T}^{\alpha}}\right|_{P} = -\frac{S \cdot T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \qquad \text{(A.2.13)}$$

Соотношения (А.2.10 – А.2.13) при $\alpha = 1$ переходят в известные соотношения Максвелла для традиционной равновесной термодинамики.

В дальнейшем для удобства будем использовать следующее обозначения для производных по термодинамическим параметрам $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \equiv \frac{\partial F}{\partial T}_V$.

А.3. ФРАКТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

При выводе уравнения состояния используется первое из соотношений (А.2.11)

$$P = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^{\alpha} F}{\partial V^{\alpha}}\bigg|_{T} \tag{А.3.1}$$

Здесь $F = -kT \cdot \ln(Z)$ – потенциал Гельмгольца, $Z = \sum_i \exp(\varepsilon_i / kT)$) – статистическая сумма, а производная дробного порядка дается выражением

$$\frac{\partial^{\alpha} F(V)}{\partial V^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial V} \int_0^V \frac{F(v)}{(V-v)^{\alpha}} dv \tag{А.3.2}$$

Соотношение (А.2.1) при $\alpha = 1$ лежит в основе традиционного подхода при выводе уравнения состояния, в остальных случаях имеем новый однопараметрический класс уравнений состояния.

Статистическая сумма в общем случае задается как

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \ldots \int \exp(-\frac{H}{kT}) d\boldsymbol{p}_1 \ldots d\boldsymbol{p}_N d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N \tag{А.3.3}$$

Здесь N – число частиц в системе, $\boldsymbol{p}$ – импульс частицы, $\boldsymbol{r}$ – координата частицы.

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \qquad – \tag{А.3.4}$$

сумма кинетической и потенциальной энергий частиц. Подставляя (А.3.4) в (А.3.3) получим

$$Z = \frac{Q(N,V,T)}{N! \Lambda^{3N}} \tag{А.3.5}$$

где $\Lambda = \sqrt{2\pi\hbar / mkT}$ – тепловая длина частицы,

$Q(N,V,T) = \int \ldots \int \exp\left(-\frac{H}{kT}\right) dr_1 \ldots dr_N$ – конфигурационный интеграл.

Представим (А.3.5) в виде

$$Z = \frac{V^N}{N!\Lambda^{3N}}\left[1 + \frac{1}{V^N}\int \ldots \int \left(\exp(-\frac{U}{kT}) - 1\right) d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N\right]$$

для потенциала Гельмгольца получим

$$F = -kT \ln Z = -kT\left[\ln\left(\frac{V^N}{N!\Lambda^{3N}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{V^N}\int \ldots \int \left(\exp(-\frac{U}{kT}) - 1\right) d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_N\right)\right] \qquad (А.3.6)$$

Подставляя (А.3.6) в (А.3.2) получим следующее уравнения состояния

$$P = kT\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}}\frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha}\left[\ln\left(\frac{V^N}{N!\Lambda^{3N}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{V^N}\int \ldots \int \left(\exp(-\frac{U}{kT}) - 1\right) d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N\right)\right] \qquad (А.3.7)$$

Вычисляя производную дробного порядка от первой слагаемой, используя при этом интеграл [68]

$$\int_0^a \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{(a^\mu - x^\mu)^{1-\beta}} dx = a^{\alpha+\mu(\beta-1)} B(\beta, \alpha/\mu)\left[\mu \ln x + \psi(\alpha/\mu) - \psi(\beta + \alpha/\mu)\right];$$

где $a, \mu, \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > 0; \mathrm{Re}\,\beta > -1$ при $\alpha = 1$, $B(x,y)$ – бета-функция Эйлера, $\psi(x)$ – пси-функция, получим

$$\begin{aligned} P = \frac{NkT}{V}\left\{1 + (1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha)\right]\right\} + \\ + kT\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}}\frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{V^N}\int \ldots \int \left(\exp(-\frac{U}{kT}) - 1\right) d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_N\right)\right] \end{aligned} \qquad (А.3.8)$$

В приближении парного взаимодействия, где $U(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) = \sum_{1 \le i < j \le N} u(r_{ij})$, уравнение (А.3.8) принимает вид

$$P=\frac{NkT}{V}\left\{1+(1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)\right]\right\}-$$
$$-kT\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial V^{\alpha}}\left[\ln\left(1-\frac{A(T)}{V}\right)\right] \qquad (A.3.9)$$

где $A(T)=\frac{N(N-1)}{2}\int\left(1-\exp(-\frac{u(r)}{kT})\right)dr$

Вычисляя производную дробного порядка во втором слагаемом в (А.3.9), используя при этом результат [68]

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\ln(x+b)}{(x+a)^{\rho}}dx=a^{\alpha-\rho}B(\alpha,\rho-\alpha)\left[\ln b+\psi(\rho)-\psi(\rho-\alpha)-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{\rho}\left(1-ab^{-1}\right){}_3F_2\left(\alpha+1,1,1;2,\rho+1;1-ab^{-1}\right)\right]$$

где ${}_3F_2(a,b,c;d)$ – гипергеометрический ряд, окончательно получим следующее уравнение состояния

$$P=\frac{NkT}{V}\left\{1+(1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)\right]\right\}-$$
$$-kT\left\{\frac{1-\alpha}{V}\left[\ln\left(1+\frac{A}{V}\right)+\psi(2-\alpha)-\psi(1)-(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)(2-\alpha+k)}\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-k-1}\right]-\right.$$
(A.3.10)
$$\left.-\frac{A}{V^2}\left[\frac{1}{1+\frac{A}{V}}+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2-\alpha+k)}\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-k-2}\right]\right\}$$

Отметим, что входящие в (А.3.10) ряды сходятся в силу малости параметра $\left[1+\frac{A}{V}\right]^{-1}$.

Для дальнейшего удобно исходить из выражения $A(T)=N^2B(T)$, где $B(T)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(1-\exp(-\frac{u(r)}{kT}\right)dr$ – второй вириальный коэффициент.

В результате уравнение (А.3.10) окончательно принимает вид

$$P=\frac{NkT}{V}\left\{1+(1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)-\frac{2-\alpha}{N}\left[\ln\left(1+\frac{N^2B}{V}\right)+\psi(2-\alpha)-\right.\right.$$

$$\left.-\psi(1)-(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)(2-\alpha+k)}\left(1+\frac{N^2B}{V}\right)^{-k-1}\right] \qquad \text{(A.3.11)}$$

$$\left.-\frac{NB}{V}\left[\frac{1}{1+\frac{N^2B}{V}}+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2-\alpha+k)}\left(1+\frac{N^2B}{V}\right)^{-k-2}\right]\right\}$$

В случае, когда $\frac{A(T)}{V}<1$ можно пренебречь малым вкладом от членов, содержащих суммы, и вместо (А.3.11) получим

$$P=\frac{NkT}{V}\left\{1+\frac{NB}{V}+(1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)-\frac{NB}{V}\right\}\right. \qquad \text{(A.3.12)}$$

Уравнение (А.3.12) при $\alpha=1$ совпадает с обычным вириальным уравнением состояния, и представляет собой «фрактальное» уравнение состояния с учетом второго вириального коэффициента.

Определим выражения для энтропии и изохорной теплоемкости.

Для энтропии исходим из выражения $S=\frac{-\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}}\frac{\partial^{\alpha}F}{\partial T_V^{\alpha}}$.

При учете второго вириального коэффициента необходимо задать его явную зависимость от температуры. Используем для него выражение

$$A(T)=N^2B(T)=N^2\left(b-\frac{a}{kT}\right),$$

где b – параметр, учитывающий объем молекулы, a – параметр, связанный с потенциалом межмолекулярного взаимодействия. Проведя расчеты, аналогичные при выводе уравнения состояния окончательно получим следующее выражение для энтропии

$$S=\frac{3}{2}Nk\left[\frac{1}{2-\alpha}+\ln\left(\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)\right)+\psi(2)-\psi(3-\alpha)\right]+k\left[\ln\left(1-\frac{A(T)}{V}\right)-\frac{1}{2-\alpha}\frac{N^2a/T}{1-\frac{A(T)}{V}}+\right.$$

$$\left.+\psi(2)-\psi(3-\alpha)\right]-k(1-\alpha)\left[(2-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(1-N^2b/V)/(1-A/V)\right]^{n+1}}{(n+1)(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\frac{N^2a/T}{1-\frac{A(T)}{V}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(1-N^2b/V)/(1-A/V)\right]^{n+1}}{(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)}\right]$$

Первое слагаемое соответствует случаю идеального газа, второе и третье слагаемые соответствуют учету второго вириального коэффициента. В приближении линейном по малому параметру $A(T)/V << 1$, окончательно, имеем

$$S = \frac{3}{2}Nk\left[\frac{1}{2-\alpha} + \ln\left(\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)\right) + \psi(2) - \psi(3-\alpha)\right] -$$

$$- Nk\left[\frac{NB}{V} + \frac{Na}{VT}\left(\frac{1}{2-\alpha} - (1-\alpha)^2\chi(\alpha)\right)\right]$$

Здесь $\chi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)}$. Или с учетом выражения для второго вириального коэффициента $B(T) = \left(b - \frac{a}{kT}\right)$ получим

$$S = \frac{3}{2}Nk\left[\frac{1}{2-\alpha} + \ln\left(\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)\right) + \psi(2) - \psi(3-\alpha)\right] -$$

$$- Nk\left[\frac{Nb}{V} - (1-\alpha)\frac{Na}{VT}\left(\frac{1}{2-\alpha} - (1-\alpha)\chi(\alpha)\right)\right] \qquad \text{(A.3.13)}$$

Для теплоемкости при постоянном объеме, исходя из обобщенного выражения $C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T_V^\alpha}$, получим следующий результат

$$C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T_V^\alpha} = \frac{3}{2}Nk\left\{1 + (1-\alpha)\left(\ln\left(\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)\right) - 1\right)\right\} +$$

$$+ kT^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial T^\alpha}\left\{\ln\left(1 - \frac{A(T)}{V}\right) - \frac{1}{2-\alpha}\frac{N^2 a/T}{1 - \frac{N^2 b}{V} + \frac{N^2 a/T}{V}} + \psi(3-\alpha) - \psi(2)\right\} -$$

$$-(1-\alpha)\left[(2-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(1 - N^2 b/V\right)/\left(1 - A/V\right)\right]^{n+1}}{(n+1)(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)} + \frac{N^2 a/T}{1 - \frac{A(T)}{V}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(1 - N^2 b/V\right)/\left(1 - A/V\right)\right]^{n+1}}{(n+2-\alpha)(n+3-\alpha)}\right]\Bigg\}$$

Входящая в это выражение, производная дробного порядка вычисляется так же, как и при расчете выражения для энтропии. В линейном по малому параметру $A(T)/V << 1$ приближении, окончательно, получим следующее выражение для изохорной теплоемкости

$$C_V = \frac{3}{2\Gamma(2-\alpha)} Nk\left\{1-\frac{2}{3}\frac{Na}{VkT}+(1-\alpha)\left(\ln\left(\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)\right)-1-\frac{2}{3}\frac{N}{V}\left(b-\frac{a}{kT}\right)\right)\right\} \qquad (A.3.14)$$

При равенстве ППДП единице выражение (А.3.14) совпадает с известным значением изохорной теплоемкости.

Для обобщения уравнения Ван-дер-Ваальса исходим из уравнения состояния (А.3.7), используя для $B(T)$ выражение $B(T) = b - \frac{a}{kT}$, где b - параметр, учитывающий объем молекулы a - параметр, связанный с потенциалом межмолекулярного взаимодействия [69], получим

$$\frac{A(T)}{V} = -N^2\frac{b}{V} + N^2\frac{a}{TV} \approx N\ln(1-\frac{Nb}{V}) + N^2\frac{a}{TV}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение состояния (А.3.7) и вычисляя производную, получим

$$P = \frac{NkT}{V}\left\{1+(1-\alpha)\cdot\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)\right]\right\}+$$
$$+\frac{NkT}{V}\frac{Nb}{V-Nb}-\frac{N^2a}{V^2}+(1-\alpha)\frac{kT}{V}\left[N\ln(1-\frac{Nb}{V})+N^2\frac{a}{TV}-\psi(1)\right]$$

Объединяя в правой части две слагаемые, получим

$$P = \frac{NkT}{V-Nb}-\frac{N^2a}{V^2}+(1-\alpha)\frac{NkT}{V}\left[\ln\left(\frac{eV}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+\psi(1)-\psi(2-\alpha)+\ln(1-\frac{Nb}{V})+N\frac{a}{TV}\right]$$

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$(P+\frac{N^2a}{V^2})(V-Nb) =$$
$$= NkT\left\{1+(1-\alpha)\frac{(V-Nb)}{V}\left[\ln\left(\frac{e(V-Nb)}{N}\left[\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}\right)+N\frac{a}{kTV}+\psi(1)-\psi(2-\alpha)\right]\right\}$$

(А.3.15)

Уравнение (А.3.15) при $\alpha = 1$ совпадает с известным уравнением Ван-дер-Ваальса. И представляет собой «фрактальное» уравнение состояния. В остальных случаях имеем ФУС Ван-дер-Ваальса.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ПУБЛИКАЦИИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Перечень научных публикаций лаборатории ММГО за 2018 г.

Учебники, учебные пособия

1. Аливердиев А.А., Амирова А.А., Бейбалаев В.Д. Основы квантовой информации // Махачкала: Издательство ДГУ. – 2018. – 32 С.

В центральных Российских изданиях:

2. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., и Аливердиев А. О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Известия РАН, Серия Физическая. – 2018. – Т. **82**. – № 7. – С. 142–145. **doi: 10.1134/S0367676518070177**
3. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. К расчету теплофизических характеристик ксенона // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. Межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 10. – Тверь. – 2018. – С. 446-452. **doi: 10.26456/pcascnn/2018.10.446**
4. Ахмедов Э.Н. Зависимость свойств от размера и формы нанокристалла золота в изобарических условиях // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. Межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 10. – Тверь. – 2018. – С. 53-63. **doi: 10.26456/pcascnn/2018.10.053**

В зарубежных изданиях, цитируемых базами Web of Science и/или Scopus:

5. Magomedov R.A., Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D. and Aliverdiev A. Generalization of Thermodynamics in fractional order derivatives and calculation of heat-transfer properties of noble gases // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2018. – Vol. **133**. – No. 2. – 1189-1194. **(Web of Science, impact 2.042, второй квантиль, doi: 10.1007/s10973-018-7024-2)**
6. Akhmedov E.N. Molybdenum lattice properties at high pressure / E.N. Akhmedov // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 2018. – Vol. **121**. – P. 62–66. **(Web of Science, impact 2.059, второй квантиль, doi: 10.1016/j.jpcs.2018.05.011)**
7. Emirov S.N., Beybalaev V.D., Ramazanova A.E., Davudov I.A., Amirova A.A. and Aliverdiev A. Temperature and Baric Patterns of Changes in the Thermal Conductivity of

Composite Materials // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2018. – Vol. **82**. – No. 7. – P. 888–891. **(Web of Science, impact 0.341, третий квантиль, doi: 10.3103/S1062873818070171)**

8. Aliverdiev A., Batani D., Benocci R., Dezulian R., Amirova A., Ragimkhanov G., Krousky E., Ullschmied J., Skala J., Dudzak R., Jakubowska K. About laser shocks dynamics for complex focal spots and structured targets // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – Vol. **946**. – 012013. **(Web of Science, Scopus, третий квантиль, doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012013)**
9. Meilanov R.R., Akhmedov E.N., Beybalaev V.D., Magomedov R.A., Ragimkhanov G.B. and Aliverdiev A. To the theory of non-local non-isothermal filtration in porous medium // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. **946**, 012076. **(Web of Science, Scopus, третий квантиль, doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012076)**

В трудах международных и российских конференций:

10. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Давудов И.А. и Аливердиев А.А. К описанию температурно-барической зависимости теплопроводности горных пород и композитных материалов // Материалы Седьмой Российской Национальной конференции по теплообмену (РНКТ-7), Москва. – 2018. – № 199. – 4 с.
11. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Амирова А.А., Давудов И.А., Аливердиев А.А. и Алхасов Ш.М. К описанию температурно-барической зависимости теплопроводности горных пород и композитных материалов // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала, 2018. – С. 154-157.
12. Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Назаралиев М.Ш., Магомедов Р.А. и Аливердиев А. К численному моделированию нелокальной неизотермической фильтрации во фрактальных средах // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 157-159.
13. Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. К расчету теплофизических характеристик ксенона, используя уравнение состояния в дробном исчислении // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 151-154.

14. Аливердиев А.А. К экспериментальным исследованиям экстремальных состояний углерода // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна, Выпуск 7. – Махачкала. – 2018. – С. 372-374.
15. Ахмедов Э.Н. Решёточные свойства молибдена при высоких давлениях // Материалы XI Школы молодых ученых «Актуальные проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов» имени Э.Э. Шпильрайна. – Выпуск 7. – Махачкала, 2018. – С. 397-404.

Тезисы конференций: международных, российских, региональных:

16. Batani, D., Carbon in the megabar pressure range: New experiment and calculations / D. Batani, K. Jakubowska, T. Sakaki, J. Trela, R. Benocci, P. Neumayer, O.N. Rosmej, C. Verona and A. Aliverdiev // Book of Abstracts of XXXIII International Conference on Equations of State for Matter March 1–6, 2018, Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, Russian Academy of Sciences – Joint Institute for High Temperatures RAS – Institute of Problems of Chemical Physics RAS – Kabardino-Balkarian State University. – Moscow & Chernogolovka & Nalchik. – 2018. – P. 53
17. Эмиров С.Н., Рамазанова А.Э., Джаватов Д.К., Бейбалаев В.Д., Амирова А.А., Давудов И.А. и Аливердиев А. Экспериментальные и теоретические исследования коэффициента эффективной теплопроводности горных пород в условиях высоких давлений и температур // Тезисы докладов II Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы исследования нефтегазовых пластовых систем» (SPRS-2018) . – Москва. – Газпром ВНИИГАЗ. – 2018. – С. 76.
18. Аливердиев А.А. Взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом: эксперимент и моделирование // X Всероссийской конференции по физической электронике (ФЭ-2018) . – Махачкала. – 2018. С. 101-102.
19. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. Расчет теплофизических свойств криптона и ксенона на основе фрактального уравнения состояния // Материалы XV Российской конференции (с международным участием) по теплофизическим свойствам веществ (РКТС-15). – Москва. – 2018.
20. Магомедов Р.А., Ахмедов Э.Н., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д. и Аливердиев А. Применение дробного исчисления для расчета теплофизических характеристик криптона // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». – Кабардино-Балкарская Республика, Эльбрус. – 22 – 26 мая 2018. – С. 166.

21. Ахмедов Э.Н. Размерная зависимость температуры плавления молибдена. Тезисы докладов Кластера конференций 2018 (XIII Международная научная конференция «Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах», X Международная научная конференция «Кинетика и механизм кристаллизации, Кристаллизация и материалы нового поколения» Международный симпозиум «Умные материалы») и Летней школы-конференции молодых ученых «Моделирование умных материалов», 1-6 июля 2018. – Суздаль. – С. 247-248.
22. Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Амирова А.А. и Аливердиев А. Закономерности изменения теплопроводности керамики в условиях высоких давлений и температур // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Кабардино-Балкарская республика, Эльбрус, 22 – 26 мая 2018. – С. 292.
23. Бейбалаев В.Д., Эмиров С.Н., Аливердиев А.А., Амирова А.А., Якубов А.З. Численное исследование процессов теплопереноса в горных породах // Материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», 4–7 декабря 2018. – Нальчик. – С. 4.
24. Ахмедов Э.Н., Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Расчет теплофизических характеристик инертных газов // Материалы Двадцать четвертой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-24, Томск), 2018, С. 583.