Дагестанский государственный университет
Отдел математики и информатики ДНЦ РАН

М.Г. Алишаев

Моделирование и расчёт в прикладной механике и добыче нефти

Спецкурс для магистров

Махачкала
2015

УДК 532.5+622.276
ББК ББК 33.361-11
А-50

Рецензенты: профессор Сиражутдинов М.М.; кафедра дискретной математики и информатики Дагестанского государственного университета.

Алишаев М.Г.

А-50 Моделирование и расчёт в прикладной механике и добыче нефти. Спецкурс для магистров. Махачкала: АЛЕФ, 2015. – 288 с.

ISBN 978-5-4242-0207-0

Рассмотрены вопросы моделирования движения в сопротивляющейся среде и расчёта основных характеристик фильтрационных течений. Книга предназначена для студентов старших курсов вузов, специализирующихся в области прикладной математики и механики, а также в области разработки месторождений нефти, газа и термальных вод.

Книга может быть использована в работе преподавателями вузов, аспирантами и магистрами, а также научными и инженерно-техническими работниками, занятыми анализом и проектированием разработки нефтяных месторождений.

ISBN 978-5-4242-0207-0

© Дагестанский государственный университет
© Отдел математики и информатики ДНЦ РАН
© АЛЕФ, 2015

Для контакта с автором:
alishaev@rambler.ru; тел. 8-909-480-65-71.

СОДЕРЖАНИЕ

1. О моделировании в механике. 11
Установление причинно-следственных связей явления. Существенные параметры, физический механизм и математическое описание. Механика Ньютона как пример моделирования движения. Постулаты механики и понятие силы. Активные и пассивные силы. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Примеры введения сил и модели механического движения со связями: конечные колебания математического маятника; движение системы грузов.

2. Движение шара в сопротивляющейся среде. 18
Сила сопротивления воздуха. Экспериментальные кривые. Сравнение силы сопротивления шара с силой тяжести. Установившаяся скорость падения шара. Зависимость её от плотности и радиуса. Вычисление установившейся скорости падения спортивного молота и каменного ядра. Набор скорости и её гашение в воздухе. Вертикальное движение вверх тяжёлого шара с учётом сопротивления воздуха.

3. Моделирование и расчёт свободных полётов. 25
Дифференциальные уравнения движения тяжёлого шара, брошенного под углом к горизонту. Интегрирование уравнений с использованием пакета Mathcad. Влияние на характеристики полёта начальной скорости, угла наклона и отношения плотностей. Полёты вулканических бомб и определение начальной скорости их выброса по дальности полёта. Секрет образования песчаного бархана Сарыкум.

4. Модель идеальной жидкости. 33
Жидкость. Понятие идеальной жидкости. Частица жидкости. Массовые и поверхностные силы. Давление в идеальной жидкости, его независимость от ориентации площадки. Скорость и ускорение частицы. Дифференциальные уравнения движения частицы. Уравнение сохранения баланса массы в любом малом объёме. Замкнутая система уравнений движения идеальной жидкости.

5. Течение вязкой жидкости по круглой трубе. 41
Течение Куэтта как модель движения в тонком слое. Вязкость и её опытное определение. Зависимость вязкости от температуры и давления. Прилипание вязкой частицы к стенке. Поверхностные силы и напряжения на площадке.

Зависимость напряжения от ориентации площадки. Давление как шаровая составляющая тензора напряжений. Течение вязкой жидкости в прямолинейной круглой трубе. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса как безразмерная характеристика решения. Переход в турбулентный режим. Перепад давления для турбулентного режима. Коэффициент гидравлического сопротивления. Вязко-пластичная жидкость.

6. Уравнения движения вязкой жидкости..... 54
Поверхностные силы и тензор напряжений. Зависимость тензора напряжений от ориентации площадки. Симметричность тензора. Понятие давления для вязкой жидкости как шаровой составляющей тензора напряжений. Тензор скоростей деформаций. Закон Стокса о линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Замкнутая система уравнений движения вязкой жидкости.

7. Геометрия порового и трещинного пространства. 62
Горные породы. Песчаные пласты и глины. Пористость. Опытное определение пористости. Понятие идеального грунта. Определение пористости идеального грунта при плотной и рыхлой упаковке. Моделирование капиллярных каналов. Трещинный пласт. Объем трещин и объём пор. Трещиновато-пористые пласты. Геологические и извлекаемые запасы. Оценка запасов.

8. Моделирование фильтрации жидкости. 72
Проницаемые и непроницаемые среды. Скорость фильтрации. Коэффициент фильтрации. Расход воды через фильтр. Опыты с другими жидкостями. Давление в жидкости. Закон Дарси. Коэффициент проницаемости. Применения для однородных жидкостей, газов. Векторная запись закона для трёхмерной фильтрации. Связь проницаемости с радиусами капилляров и пористостью. Пределы применимости закона Дарси. Нелинейная фильтрация. Условие сохранения массы фильтрующейся жидкости. Дифференциальное уравнение для распределения пластового давления.

9. Установившаяся фильтрация к единичной скважине. 82
Предположения об однородности и осевой симметрии притока к скважине. Пластовое давление на забое и на контуре питания. Закон Дарси для случая осевой симметрии.

Условие сохранения массы потока. Распределение давления вокруг добывающей скважины. Воронка давления. Формула Дюпюи. Плоский источник (сток). Логарифмический закон распределения пластового давления. Принцип суперпозиции фильтрационных течений. Дуплет. Понятие о самоциркуляционной системе добычи термальной воды.

10. Установившаяся фильтрация в однородном пласте.....90
Добывающая скважина в однородном фильтрационном потоке. Распределение давлений. Компоненты скорости фильтрации. Линии тока. Движение частиц, отмеченных поперёк потока. Динамика их поглощения скважиной. Комплексный потенциал течения. Прямолинейный ряд нагнетательных скважин. Линии тока и линии равного потенциала нагнетательного ряда.

11. Кривые обводнения скважин и плоские течения.....98
Дуплет. Линии тока и линии равного потенциала. Движение линии отмеченных частиц. Чередующийся ряд нагнетательных и добывающих скважин. Обводнение и охват пласта. Площадная пятиточечная система нагнетательных и добывающих скважин. Пример точного расчета для случая квадратной сетки скважин.

12. О применении конечно-разностных методов. 106
Неоднородный пласт, разрабатываемый сеткой скважин. Разностная схема решения задачи распределения пластового давления по значениям на контуре и по данным дебитам. Пример расчета для квадратного элемента пятиточечной системы.

13. Нестационарная фильтрация слабо сжимаемой жидкости в упругой пористой среде. 117
Вывод уравнения для пластового давления в нестационарных условиях фильтрации слабо сжимаемой жидкости. Пьезопроводность и её значения. Осесимметричный случай. Постановка задачи в автомодельном виде. Решение нестационарной осесимметричной задачи об отборе нефти единичной скважиной из бесконечного по протяжённости однородного нефтяного пласта. Развитие фильтрационного течения в бесконечном однородном пласте с единственной скважиной. Движение изобар.

14. О приложениях автомодельного решения. 126
Снижение давления на забое и на условном контуре питания при вводе скважины. Связь перепада давления с поддерживаемым дебитом. Задача восстановления забойного давления по истечению некоторого времени. Определение проницаемости по кривой восстановления забойного давления. Принцип суперпозиции для нестационарных течений в бесконечном пласте. Поле давлений при разновременном вводе скважин. Нестационарный дублет.

15. Неавтомодельные задачи упругого режима для одиночной скважины. 132
Снижение давления в неограниченном однородном пласте при заданном дебите скважины. Метод Лапласа. Сравнение с автомодельным случаем. Снижение пластового давления на забое скважины. Снижение пластового давления на заданном контуре. Получение автомодельного решения методом Лапласа. Режим истощения упругого запаса для конечного пласта.

16. Истощение упругого запаса круговой залежи..... 142
Упругий запас замкнутой нефтяной залежи. Истощение запаса при эксплуатации одной центральной скважиной. О точных постановках задачи и их решении преобразованием по Лапласу. Характерный пример нахождения оригинала по изображению. Снижение давления на контуре и на забое при фиксированном дебите.

17. Кривые вытеснения нефти водой из пористых сред..... 150
Лабораторные кривые вытеснения. Безводный и водный периоды. Характер обводнения. Схема поршневого вытеснения без учёта силы тяжести. Плотность закачиваемой воды и плотность пластовой нефти. О вытеснении с учётом силы тяжести. Модель вытеснения для пачки капилляров, радиусы которых распределены равномерно на отрезке $[0, R]$. *Общий случай распределения радиусов капилляров. Описание водного периода.*

18. Относительные фазовые проницаемости нефти и воды.... 159
Механизм вытеснения нефти водой. Вытеснение и вымывание нефти водой в одной отдельно взятой крупной поре. Связь расходов фаз с водонасыщенностью поры. Действие сил смачивания. Эксперименты на прозрачных моделях и попытки теоретического описания. Обобщение

закона Дарси для совместной фильтрации нефти и воды в поровой среде. Недостатки описания. Лабораторные определения относительных фазовых проницаемостей.

19. Моделирование вытеснения нефти водой..... 172

Скорости фильтрации фаз при совместном течении нефти и воды. Суммарная скорость фильтрации фаз. Доля воды в потоке. Кажущаяся вязкость смеси. Уравнение для насыщенности водой. О решениях уравнения переноса. Характеристики. Решение одномерной задачи вытеснения нефти водой. Скачок насыщенности. Условия на скачке. Геометрическое определение скачка. Безводная и конечная нефтеотдача. Их определение. Связь кривой вытеснения с относительными проницаемостями.

20. Влияние гравитационных сил на вытеснение. 185

Давления в фазах. Скорости фильтрации фаз. Фильтрационная скорость сегрегации. Максимальное значение. Вертикальное вниз вытеснение. Граничное условие на входе. Решение задачи вертикального вытеснения. Фронт вытеснения и фронт вымывания. Случай неполного вымывания. Нефтеотдача и обводнённость. Вытеснение под углом к вертикали. Влияние разности плотностей на показатели вытеснения.

21. Капиллярное взаимодействие жидкостей в пористой среде..... 195

Поверхностное натяжение. Свойство смачивания. Угол смачивания. Капиллярный подъём смачивающей фазы. Моделирование подъёма как пример движения тела переменной массы. Зависимость капиллярного давления от насыщенности смачивающей фазы. Функция Леверетта. Установившееся распределение капиллярно поднятой воды. Введение капиллярного давления с позиций механики. Задача вытеснения нефти водой и оценки значения связанной воды.

22. Трехмерная установившаяся фильтрация в пласте большой толщины. 207

Приток к сферической скважине в однородном бесконечном пласте. Сферический сток и источник. Моделирование притока нефти к интервалу перфорации. Приток к эллипсоиду вращения. Сравнение формул для притока. Взаимовлияние дебитов скважин. Вертикальное и горизонтальное расположение интервалов притока и

закачки. Случай достаточно мощного, но ограниченного по толщине пласта.

23. Неустановившаяся фильтрация в массивной однородной трехмерной залежи.....219

Точечный нестационарный сферический сток. Пуск сферической скважины с постоянным дебитом. Время выхода на стационарный режим и размеры зоны возмущения. Кривая восстановления давления (КВД) для сферической скважины в массивной залежи. Характерные признаки КВД для массивной залежи. Учет сжимаемости жидкости в стволе скважины.

24. Моделирование сжимаемости порового и трещинного пространства
пород.....236

Модуль упругости тела, содержащего пустоты. Объемная деформация тела, содержащего пустоты. Особые случаи, когда понятие сжимаемости пустотного пространства неприемлемо. Объемные деформации породы при трехосном растяжении-сжатии. Сжимаемость пустот трещинного, порового и трещинно-порового коллектора от изменения пластового и горного давлений.

25. Метод материального баланса для подсчёта запасов
мощной залежи. 259

Средняя сжимаемость пустот мощной залежи. Параметры пластовой нефти по глубине залежи фундамента. Плотность морской воды как функция температуры и давления. Метод материального баланса. Применение метода материального баланса на стадии закачки.

26. О моделировании температурных режимов скважины и
пласта..... 275

Общее описание проблематики. Прогревание воды по стволу нагнетательной скважины. Промысловые замеры температуры закачиваемой воды на забое. Температурный режим пласта. Потери тепла по стволу добывающей скважины. Задачи термического режима скважины.

Видному учёному,
доброму наставнику и другу,
Г.Г. Вахитову посвящается.

Предисловие

Предлагаемый курс лекций и его части читались автором ряд лет в качестве спецкурса для студентов 4-5 курсов математического факультета Дагестанского государственного университета, выбравших себе специализацию в области прикладной математики и информатики. Целью чтения являлось ознакомление с математическими методами и готовыми пакетами компьютерных программ, их применением при моделировании природных явлений, и с расчётами технологических процессов, наиболее распространёнными в нефтяном хозяйстве. Отчасти содержание спецкурса заменяло исключенные из учебного плана подготовки математиков-прикладников «Избранные главы естествознания», долго входившие в перечень дисциплин математических специальностей вузов. Автор старался по возможности связать содержание спецкурса с пройденными студентами обязательными курсами по математическому анализу и методам вычислений, информатике, дифференциальным уравнениям, теоретической механике и математической физике, показать широкие возможности метода моделирования и научного подхода. Содержание спецкурса отражает и личные симпатии автора к теории фильтрации и вытеснению нефти водой в пластовых условиях, к разработке нефтяных месторождений и добыче термальных вод, к проблемам овладения геотермальной энергией.

Первые 3 лекции являются вводными. В них по существу рассмотрены хорошо известные из школы задачи механики с моделированием сопротивления среды пропорционально квадрату скорости тела. Именно учёт влияния сопротивления среды на движущееся тело требует моделирования, т.е. некоторого упрощения и схематизации её математической формулировки действия сопротивления на тело. Оно является наиболее уязвимым местом расчётов. Наличие в компьютере

пакета Mathcad позволяет легко справляться с разнообразными нелинейными задачами механики. В случае движущегося шара расчётным результатам можно верить в довольно широком интервале изменения числа Рейнольдса.

Следующие 3 лекции вводят студентов в гидродинамику. Они убеждаются в том, что уравнения с частными производными имеют гораздо более широкие приложения, нежели те, что обычно приводятся в стандартных курсах. Сначала излагается модель идеальной жидкости и в качестве приложений указывается теория волн. Затем вводится понятие вязкой жидкости, и рассматривается установившееся течение в круглых трубах. Вводится понятие вязко-пластичной жидкости и применением законов статики выводятся формулы расхода для круглых труб. Далее, на основе пропорции тензора напряжений и тензора скоростей деформаций в условиях изотермии выводятся уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости. Эти 3 лекции студентов – математиков впечатляют.

Последующие 20 лекций посвящены моделированию фильтрации в пористой среде. В отличие от существующих стандартных курсов по подземной гидромеханике, здесь использован фактический промысловый материал, с которым автор имел дело за время работы в «Зарубежнефти» над технологическими схемами разработки залежи фундамента месторождения Белый Тигр. Из-за большой мощности залежи и применения подошвенного заводнения для поддержания пластового давления актуальными стали учёт пространственного характера течения и гравитационная сегрегация нефти и воды. Последние 3 лекции содержат преимущественно фактический справочный материал.

Автор надеется, что читатели найдут в лекциях немало интересного и оригинального. Особенно, в изложении вытеснения нефти водой в мощных залежах. И может кто-то воспользуется приведёнными здесь результатами или соображениями.

Приношу своим соавторам по публикациям в научных изданиях разных лет благодарность за поддержку и желаю им доброго здоровья на долгие годы.

Лекция 1

О моделировании в механике.

Установление причинно-следственных связей явления. Существенные параметры, физический механизм и математическое описание. Механика Ньютона как пример моделирования движения. Постулаты механики и понятие силы. Активные и пассивные силы. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Примеры введения сил и модели механического движения со связями: конечные колебания математического маятника; движение системы грузов.

Методы изучения естественных наук условно можно разделить на два типа: описательные и конструктивные. Изучение начинается всегда с описания явления. При количественном накоплении фактов возникает необходимость в систематизации и установлении причинно-следственных связей и введении новых понятий, терминов и величин, достаточных для описания и объяснения того или иного явления или фактов. И если в лабораторных условиях явление воспроизведено экспериментально, то описательное изучение превратилось в опытное исследование, появилась возможность изучения разно-вариантных проявлений и установления количественных связей. С накоплением фактов и их осмыслением становится возможным описывать явление теми или иными математическими соотношениями, создавать модели технологических процессов, использующих данное явление. Технологические процессы промышленного производства желательно сопровождать соответствующим моделированием и проведением расчетов.

Примерами описательных наук являются география, петрография, геология, зоология и т.п. Здесь ограничиваются в основном описанием, где и что имеется, какие происходят изменения во времени. Модели в таких науках используются для прогноза явлений очень узких классов прикладного характера.

К конструктивным наукам относятся физические и химические науки: механика служит основой машиностроения и строительства; новые технологии не обходятся без

моделирования химических процессов; новые физические исследования и открытия обычно сопровождаются применением современных вычислительных методов и компьютерного моделирования.

Механика как наука возникла в глубокой древности из практических потребностей расчета разного рода механизмов, развивалась в последние столетия как научная база машиностроения, авиации, космонавтики и многих других отраслей современной техники, а также строительства сооружений. Развитие механики можно представить как введение цепочки модельных абстрактных понятий: тела моделируются как материальные точки при рассмотрении макроскопических движений; действия других тел на рассматриваемое тело заменяются силами; силы моделируются векторами; и т.п.

Термин *механика* введен Аристотелем (384-322 гг. до н.э.). Статику как учение о равновесии тяжестей создал Архимед (287-212 гг. до н.э.). Открытие законов инерции и свободного падения тел Г. Галилеем (1564-1642 гг.) явилось мощным толчком к развитию динамики – изучению движения под действием сил. Основы динамики были заложены И. Ньютоном (1643-1727 гг.) в его знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии», вышедшем в свет 1687 году. Современное изложение механики и разработка проблем движения твердого тела под действием сил принадлежит Л. Эйлеру (1707-1783 гг.). Классическая механика получила своё завершение в трудах Ж. Лагранжа (1736-1813 гг.), который широко внедрил аналитические методы в механику. Уравнения движения механической системы, предложенные им, ещё остаются наиболее эффективным методом исследования движения механических систем под действием сил.

Механику Ньютона можно рассматривать как образец моделирования движения макроскопических тел в околоземном пространстве. Первый закон признаёт силу единственной причиной отклонения от прямолинейного равномерного движения, второй закон постулирует пропорциональность изменения скорости материальной точки действующей силе, третий закон позволяет освобождать несвободное тело, вводя реакции связей и расчленяя систему на отдельные свободные материальные точки или тела. Область

применения модели оказалась настолько широкой и продуктивной, что механику Ньютона возвели в ранг общих законов Природы, по крайней мере, в пределах Солнечной системы.

Проиллюстрируем на примерах о движении математического маятника и взаимосвязанных грузов использование основных допущений и постулатов механики. На рис. 1.1 изображен математический маятник, совершающий колебания в одной и той же плоскости. Его положение полностью определяется углом отклонения от вертикали φ и длиной нерастяжимой нити l. К концу нити подвешен груз массой m, который стремится занять наиболее низкое положение, при котором нить вертикальна. Задача состоит в описании движения груза под действием силы тяжести. Но груз не свободен, нить ограничивает его движение дугой окружности радиуса l.

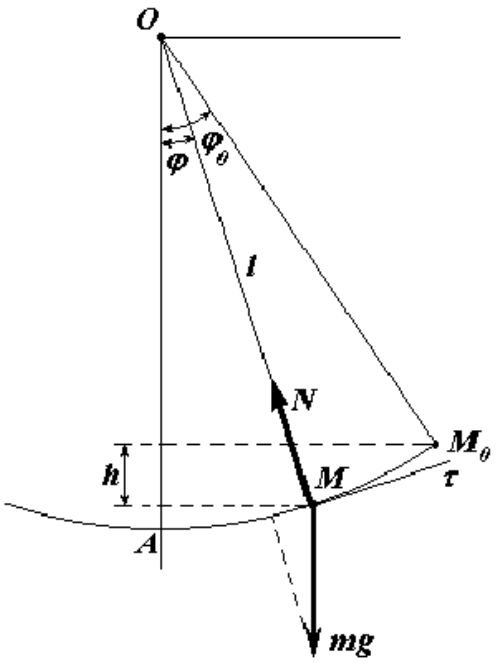


Рис. 1.1. Силы, действующие на математический маятник: активная сила тяжести ***mg*** и пассивная сила натяжения нити ***N***.

Прежде чем пользоваться вторым законом Ньютона и писать уравнения движения груза, следует смоделировать задачу, очистить её от второстепенного воздействия, подвести под сформулированные Ньютоном законы. Не учитываем трение в точке подвеса O и сопротивление воздуха движению груза, активной действующей силой является сила тяжести mg, которая тянет груз в вертикальном вниз направлении. Нужно груз освободить от связей и сделать его свободным. Мысленно обрезаем нить, и действие нити на груз заменяем силой, направленной вдоль нити. Натяжение нити является пассивной силой в отличие от активной силы тяжести. Иначе её называют

реакцией связи. Величина реакции связи (в нашем случае натяжения нити) определяется из решения задачи, для его определения к дифференциальным уравнениям движения необходимо добавить уравнение связи (уравнение окружности для координат груза в нашем случае). Убрав трение о нить и сопротивление воздуха, мы создали *модель* реальной задачи, которую в этих рамках можно решить, изучить, сосчитать что-то и сравнить с экспериментом.

Направим оси декартовых координат от точки подвеса: абсциссу Ox вертикально вниз вдоль OA; ординату Oy по горизонтали вправо. Координаты движущегося груза составят $x=l\cdot\cos\varphi$, $y=l\cdot\sin\varphi$, и они связаны соотношением $x^2+y^2=l^2$. Проекции ускорения на координатные оси составляют $(\ddot{x},\ddot{y})$, проекции силы тяжести $(mg,0)$, проекции натяжения нити $(-Ncos\varphi,-Nsin\varphi)$. Дифференциальные уравнения движения груза будут иметь вид [1-3]

$$m\ddot{x}=mg-Ncos\varphi,\ \ m\ddot{y}=-Nsin\varphi. \qquad (1.1)$$

При задании начальных условий для положения груза и его скорости, из (1.1) и уравнения связи найдутся 3 неизвестные как функции времени: координаты точки и натяжение нити.

Покажем, как упростить систему (1.1), используя выражения координат через угол отклонения φ. Для первых и вторых производных по времени координат (x,y) можно получить дифференцированием

$$\dot{x}=-l\dot{\varphi}sin\varphi,\dot{y}=l\dot{\varphi}cos\varphi;$$
$$\ddot{x}=-l\dot{\varphi}^2cos\varphi-l\ddot{\varphi}sin\varphi,\ddot{y}=-l\dot{\varphi}^2sin\varphi+l\ddot{\varphi}cos\varphi. \qquad (1.2)$$

Подставляем (1.2) в (1.1) и преобразованием получаем дифференциальное уравнение для угла отклонения от вертикали и формулу для натяжения нити

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}sin\varphi=0,\ N=m(gcos\varphi+l\dot{\varphi}^2). \qquad (1.3)$$

Нелинейное уравнение конечных колебаний математического маятника (1.3) решается при заданных начальных условиях с помощью пакета Mathcad [4]. Если, например, заданы условия $\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$ и $\dot{\varphi}(0)=0$, то соответствующие операторы можно написать в виде:

$m := 1 \quad l := 9.8 \quad t1 := 20 \quad t0 := 0 \quad g := 9.8$

Given

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\cdot\sin(\theta(t)) = 0$$

$$\theta(t0) = \frac{\pi}{2} \qquad \theta'(t0) = 0$$

$$\theta := \text{Odesolve}(t, t1, 1000)$$

$$f(t) := \frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right) \qquad N(t) := m\cdot\left[g\cdot\cos(\theta(t)) + l\cdot\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\right]$$

Расчеты и графические построения в пакете Mathcad производятся в автоматическом режиме. Ниже на рис. 1.2 приведены графики угла отклонения при начальном отклонении на прямой угол (сплошная линия) и его аналога для малых колебаний, когда синус угла заменяется углом в радианах. Ниже представлен ещё график для значений натяжения нити.

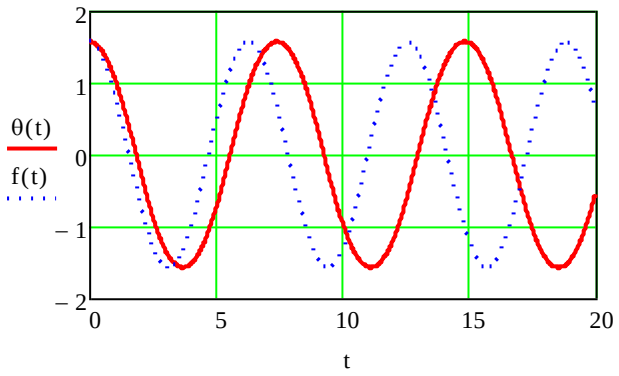


Рис. 1.2. График колебаний математического маятника с размахом угла отклонения π/2 и его сравнение с графиком малых колебаний той же амплитуды. Видно увеличение периода конечных колебаний.

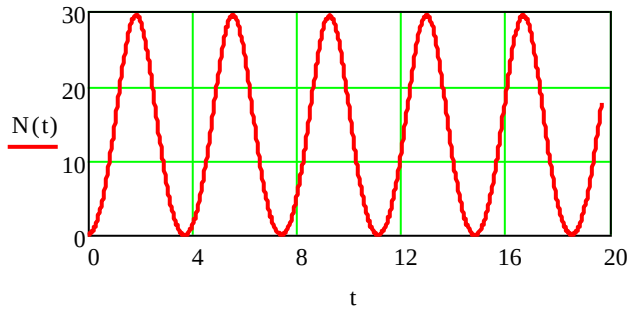


Рис. 1.3. График изменения натяжения нити во времени. Для крайнего горизонтального положения натяжение нити равно нулю, в вертикальном положении натяжение максимально.

Из графика видно, что конечные колебания имеют период, больший, чем период малых колебаний, определяемый формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, и равный в нашем примере (l=9.8 м, g=9.8 м/с²) 2π сек. В нашем случае увеличение периода составляет 1.18. Изменения натяжения нити N также носят

периодический характер, но период колебаний для натяжения нити в 2 раза меньше.

Что касается других характеристик колебаний маятника, они могут быть найдены, пользуясь вычисленной выше функцией φ=θ(t). Отметим, что колебания получились при таком моделировании незатухающими, наложенные связи были без трения, идеальными. Фактически трение в точке подвеса действует и гасит колебания. Есть способы уменьшения трения, они были предложены ещё И. Ньютоном, нить заменялась лёгким стержнем, а точка подвеса призматической опорой. Реализованные студентами машиностроительного факультета Дагестанского политехнического института такие маятники без подвода энергии совершали колебания в воздухе час и более.

Существуют способы моделирования колебаний с учётом наличия сопротивления среды. Для колебаний математического маятника сила сопротивления грузу пропорциональна квадрату скорости и направлена по касательной к траектории против движения. Ранее из-за вычислительных трудностей такого рода задачи для студентов не предназначались [1]. С развитием же компьютерных программных средств они уже стали посильными для современных студентов. В последующих лекциях мы приведём и такую модель затухающих колебаний математического маятника с квадратичным законом сопротивления движению.

Рассмотрим ещё один поучительный пример движения системы грузов с наложенными связями. На рис. 1.4 изображены два груза, связанных нерастяжимыми нитками, переброшенными через весомый блок. Поверхности гладкие, трение отсутствует. Эти предположения содержат уже признаки моделирования. В механическую систему входят два груза с массами m_1, m_2 и блок с моментом инерции J. Внешние связи осуществляются двумя плоскостями и блоком, через которую перекинута нить длины l. Координату вдоль наклонной плоскости второго груза обозначим через x, тогда первый груз будет иметь координату $(l - x)$ и ускорение $-\ddot{x}$. Угловая скорость блока связана со скоростью движения грузов $\dot{x} = R\dot{\varphi}$, если нет скольжения нити по блоку.

Для механической системы на рис. 1.4 с весомым идеальным (без трения) блоком дифференциальные уравнения движения имеют вид [3]

$$-m_1\ddot{x} = -S_1,\ m_2\ddot{x} = -S_2 + m_2 g\sin\propto,\ J\ddot{\varphi} = -S_1R + S_2R\ . \quad (1.4)$$

Из этих уравнений и уравнения связи определяются неизвестные величины: ускорение грузов a, натяжение нитей S_1 и S_2.

$$a = \frac{m_2 g\sin\alpha}{m_1+m_2+J/R^2},\ S_1 = \frac{m_1 m_2 g\sin\alpha}{m_1+m_2+J/R^2},\ S_2 = \frac{(m_1+J/R^2)m_2 g\sin\alpha}{m_1+m_2+J/R^2}\ . \quad (1.5)$$

К примеру, если массы одинаковы, т.е. $m_1 = m_2 = m$ и $J = mR^2/2$, то формулы значительно упрощаются, и $a = 0.4g\sin\propto$, $S_1 = 0.4mg\sin\propto$, $S_2 = 0.6mg\sin\propto$.

Рассмотренная модель решения задачи не пригодна при наличии трения скольжения, а также, если нить считать упруго растяжимой. Но можно усложнить модель, вводя коэффициенты трения скольжения. Студенту под силу решить задачу с учётом трения, появится условие, при котором возможно движение. Учесть растяжимость нити значительно труднее, здесь надо в уравнении связи отразить общую растяжимость нити через модуль Юнга.

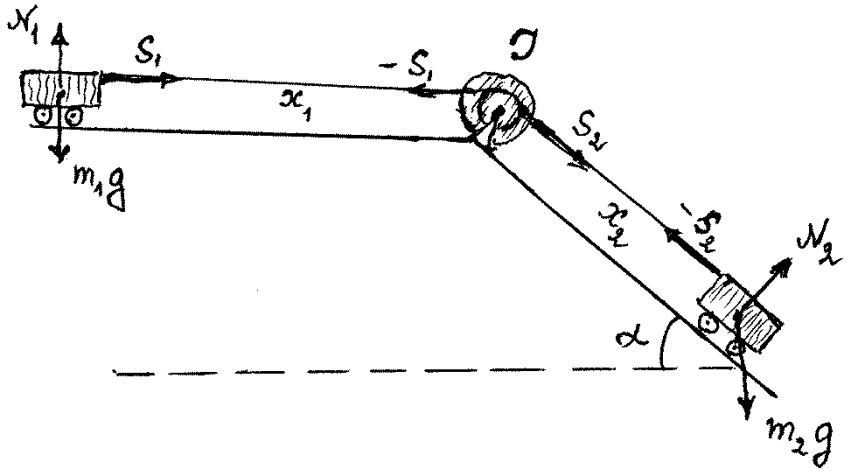


Рис. 1.4. Система грузов и её расчленение на отдельные части.

Главное, что следует запомнить из этой вводной лекции, в механике введение понятия силы позволило движение системы тел расчленять, моделировать через движение свободных тел. Чтобы несвободные тела рассматривать также как и свободные, следует освобождаться от связей, вводя пассивные силы, называемые реакциями связей. Реакции связей определяются в процессе решения задачи с привлечением действия наложенных связей.

Лекция 2.

Движение шара в сопротивляющейся среде.

Сила сопротивления воздуха. Экспериментальные кривые. Сравнение силы сопротивления шара с силой тяжести. Установившаяся скорость падения шара. Зависимость её от плотности и радиуса. Вычисление установившейся скорости падения спортивного молота и каменного ядра. Набор скорости и её гашение в воздухе. Вертикальное движение вверх тяжёлого шара с учётом сопротивления воздуха.

Сила сопротивления.

С глубокой древности человек интересовался полётом в атмосфере брошенных тел. Результатом явилось изобретение бумеранга, используемого в охоте. Много споров было и насчет траекторий каменных ядер, выбрасываемых под углом к горизонту. Считалось, что вначале ядро летит прямолинейно, а затем переходит в вертикальное падение. В школьном курсе физики задача эта решается без учёта сопротивления воздуха, что оправдано для небольшого интервала изменения скоростей, ориентировочно не выше 5 м/с. Однако более высокие скорости требуют учета влияния сопротивления воздуха.

Значимость действия скорости ветра на тело по сравнению с действием силы тяжести можно «увидеть», если подвесить тело к неподвижной опоре на нерастяжимой нити. Под действием ветра нить отклонится на угол φ. Равновесие наступит при условии, что равнодействующая силы тяжести mg и силы действия ветра F направлена вдоль нити, т.е. $F=mg\cdot\mathrm{tg}\varphi$. На рис. 2.1 показаны эти силы. Если принять еще гипотезу о том, что сила действия ветра пропорциональна квадрату скорости v, площади поперечного сечения тела S и плотности атмосферы ρ, то можно угол отклонения груза φ связать со скоростью v зависимостью

$$F = cS \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 = mg \cdot tg\varphi \ , \qquad (2.1)$$

где c-коэффициент пропорциональности. Для различных скоростей угол φ можно измерить и по известным параметрам тела определить зависимость коэффициента c от скорости ветра. Например, для шара радиуса R имеем: $S = \pi R^2$, $m = \rho_0 V$,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где ρ_0 есть плотность шара. Из приведённых соотношений следует, что коэффициент сопротивления шару можно найти по формуле

$$c = \frac{8}{3} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{gR}{v^2} tg\varphi. \qquad (2.2)$$

Многочисленными экспериментами доказано, что для широкого диапазона скоростей коэффициент сопротивления представляет собой константу, не зависящую от скорости тела, если скорость тела не превосходит скорости звука в атмосфере. Например, для шара коэффициент *c* находится в пределах 0.4-0.45.

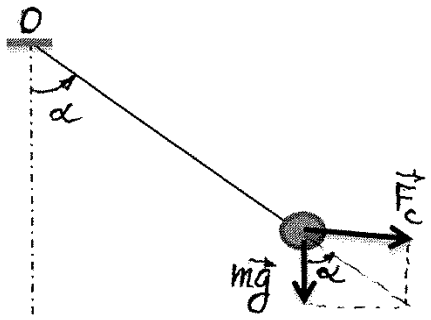


Рис. 2.1. Отклонение ветром подвешенного тела. Равнодействующая силы тяжести и силы действия ветра направлена вдоль нити.

Современный эксперимент отличается от описанного выше опыта. Дело в том, что ветер заданной скорости создают в аэродинамических трубах. Тело закрепляют в трубе и силу сопротивления измеряют через динамометр.

Эксперименты производились не только с воздухом, но и с водой в гидродинамических каналах. С разными газами и различными жидкостями. Сила действия потока на тело оказалась зависящей от скорости потока довольно сложным образом. Влияние оказывает и вязкость жидкости. Во всех случаях был указан достаточно широкий диапазон скоростей, где гипотеза пропорциональности силы сопротивления квадрату скорости оправдывается.

На рис. 2.2 изображён график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса, единственного безразмерного параметра, включающего в себя характеристики потока (плотность ρ, вязкость μ и скорость v) и радиус шара.

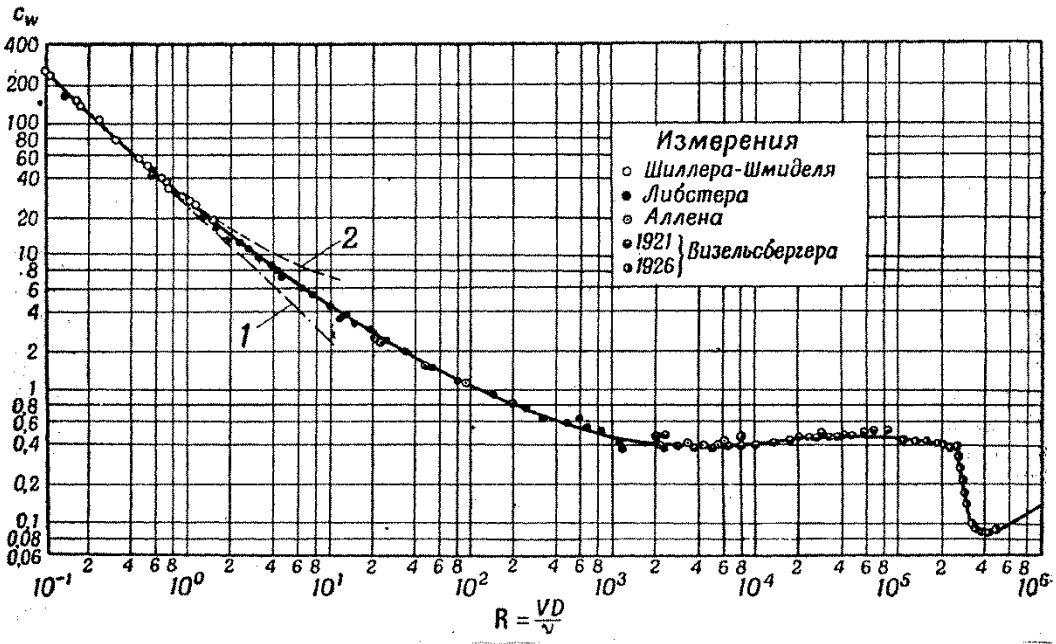


Рис. 2.2. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для шара. В пределах диапазона чисел от 1000 до 250000 можно принимать его от 0.4 до 0.45.

Число Рейнольдса меняется в очень широких пределах, от 0 до 10^7. Его обычно вычисляют по формуле

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \qquad (2.3)$$

и на графиках представляют в логарифмическом масштабе.

Например, для атмосферного воздуха ρ=1.2 кг/м^3, μ=17.3 мкПа·с и шара радиуса 5 см (d=0.1 м), имеем для скоростей v= 1; 10 и 100 м/с соответственно Re=6936; 69360 и 693600. Обычно встречающиеся числа Рейнольдса для воздушных потоков составляют от тысяч до миллиона. Из графика рис 2.2 видно, что в практически важном интервале изменения числа Рейнольдса коэффициент сопротивления для шара c≈0.40-0.45. Будем принимать его для шара равным 0.4, и записывать формулу силы сопротивления шару в виде

$$F = cS \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 = 0.2\pi R^2 \cdot \rho v^2 \qquad (2.4)$$

В случае тел не шаровой геометрической формы действие атмосферы как сопротивляющейся среды не сводится к одной силе сопротивления. Действие атмосферы может быть заменено одной результирующей силой, приложенной в выбранной точке, и одним вектором-моментом относительно той же точки. Для моделирования полета спортивного диска

или копья приходится привлекать больше уравнений, нежели при моделировании движения спортивного молота или футбольного мяча.

Установившаяся скорость падения шара.

В атмосфере, под действием тяжести и сопротивления воздуха, шар, отпущенный без начальной скорости, будет вначале двигаться ускоренно, так как при малых скоростях мала и сила сопротивления воздуха. Однако с набором скорости растет и сила сопротивления, причём пропорционально квадрату скорости. С приближением к силе тяжести, ускорение падающего шара становится всё меньше, и при силе сопротивления, равной силе тяжести, ускорение шара становится равным нулю, а падение равномерным. Найдём эту установившуюся скорость v_∞, приравняв силу сопротивления F силе тяжести $mg=\rho_0 Vg$. Получим

$$0.2\pi R^2 \cdot \rho v^2 = \rho_0 g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,\ v_\infty = \sqrt{\frac{20}{3}\frac{\rho_0}{\rho} gR}. \qquad (2.5)$$

Получилось, что установившаяся скорость шара пропорциональна корню квадратному от отношения плотностей и корню квадратному от размера. Более плотный шар имеет большую установившуюся скорость, большего размера шар имеет также большую установившуюся скорость. Например, стальное ядро (ρ_0=7800 кг/м^3) радиуса 7 см в атмосфере (ρ=1.2 кг/м^3) будет иметь установившуюся скорость падения 172 м/с, тогда как каменное ядро (ρ_0=2300 кг/м^3) того же размера – 93.6 м/с. Круглый камушек радиуса 1 см может приобрести установившуюся скорость до 35.4 м/с.

Из практики парашютного спорта известно, что до раскрытия парашюта скорость падения спортсмена составляет примерно 60 м/с, а после раскрытия 5-7 м/с. Можно попытаться получить соответствующую формулу установившейся скорости падения спортсмена, подобрав коэффициент сопротивления c из опыта.

Примечание. Автор «согрешил», не учёл в равенстве сил (2.5) одну из сил. На любое тело в атмосфере или в воде действует ещё и выталкивающая сила Архимеда, равная тяжести среды, вытесненной объёмом тела. Формула (2.5) при учете архимедовой силы выталкивания изменится, а именно вместо ρ_0 надо будет писать ρ_0-ρ. Если интересы исследования

ограничены движением плотных тел в атмосфере, такой «грех» допустим. Однако, если рассматривать движение мяча или воздушного шарика, то учет силы выталкивания необходим.

Установившаяся скорость падения v_∞ является одной из характеристик сопротивления среды, и её удобно вводить в ряде задач. Мы неоднократно будем пользоваться этим понятием.

Набор и гашение скорости.

Как быстро набирает скорость падающее тело? Изучим это на примере падающего без начальной скорости тяжёлого шара, причем архимедову выталкивающую силу и силу сопротивления не будем выделять. Дифференциальное уравнение движения запишем в очевидном виде

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right), \quad v(0) = 0. \tag{2.6}$$

Уравнение интегрируется и можно время выразить явно

$$t = \frac{v_\infty}{2g} ln \frac{1+v/v_\infty}{1-v/v_\infty} \quad \text{или} \qquad \frac{v}{v_\infty} = th\frac{gt}{v_\infty} \tag{2.7}$$

Если принять за установившееся значение 99% от v_∞, то значение логарифма составит $ln(199)= 5.3$, время установления определится как $2.65v_\infty/g$. Если установившаяся скорость равна 100 м/с, то до её достижения уйдёт около 27 сек. Вначале, когда скорость ещё мала, можно приближённо считать, что $v \cong gt$.

Как быстро гасит начальную скорость атмосфера или водная среда? Если начальная скорость достаточно высокая, как скорость пули, то действием силы тяжести можно пренебречь по сравнению с силой сопротивления среды, и для скорости тела написать уравнение движения в виде, аналогичном (2.6)

$$\frac{dv}{dt} = -g\frac{v^2}{v_\infty^2}, \quad v(0) = v_0 \gg v_\infty. \tag{2.8}$$

Зависимость скорости от времени представится в виде

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1+v_0 \cdot gt/v_\infty^2} \tag{2.9}$$

На рис. 2.3 представлены графики отношения v/v_0 для v_0=300 м/с и значений v_∞=200; 100; 50 и 30 м/с. Вдоль оси абсцисс отложено время в секундах. По оси ординат отложено

текущее значение скорости для различных сред с их разными значениями установившихся скоростей v_∞.

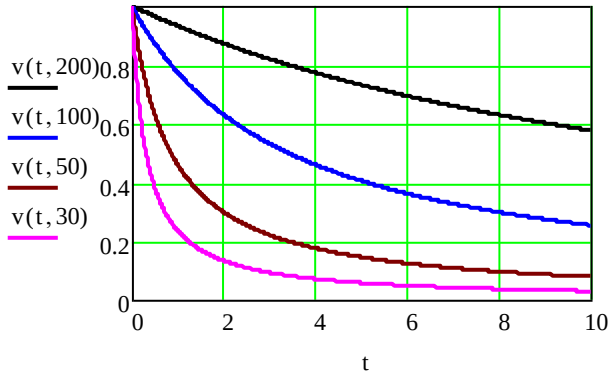


Рис. 2.3. Графики снижения скорости шара после входа в среду с начальной скоростью 300 м/с и для установившихся значений скоростей 200; 100; 50 и 30 м/с.

Из (2.9) видно, что во времени гашение скорости носит гиперболический характер.

Движение тяжёлого шара вертикально вверх.

Рассмотрим движение вверх шара, на которого действуют сила тяжести, сила сопротивления воздуха и архимедова выталкивающая сила. Дифференциальное уравнение движения представим в виде, где искомой является скорость

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - F + F_a,\ F = 0.2\pi R^2 \rho v^2,$$
$$F_a = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,\ m = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (2.10)$$

После очевидных преобразований и введения значения установившейся скорости согласно формуле

$$v_\infty = \sqrt{\frac{20}{3}\frac{\rho_0 - \rho}{\rho} gR}\ , \qquad (2.11)$$

получаем для скорости задачу

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{v_\infty^2}\right),\ v(0) = v_0. \qquad (2.12)$$

Решение этой задачи элементарно. Оно имеет вид

$$\frac{v}{v_\infty} = \left(\frac{v_0}{v_\infty} - tg\frac{gt}{v_\infty}\right) / \left(1 + \frac{v_0}{v_\infty} tg\frac{gt}{v_\infty}\right) \qquad (2.13)$$

и справедливо до тех пор, пока скорость не обратится в нуль. Обращение же скорости подъёма в нуль произойдет в момент, когда числитель обратится в нуль, т.е. для времени

$$t = \frac{v_\infty}{g} arctg\frac{v_0}{v_\infty}\ . \qquad (2.14)$$

Формула (2.13) показывает, что закон изменения скорости от времени стал более сложным, нелинейным. Для малой начальной скорости $v_0 << v_\infty$ формула (2.14) преобразуется в

формулу, известную из школьного курса $t=v_0/g$, полученную без учета сопротивления воздуха. Однако при больших скоростях $v_0>>v_\infty$, будем иметь совершенно другой результат $t\sim\pi v_\infty/2g$, т.е. получаем время, не зависящее от начальной скорости и всецело определяемое свойствами среды.

Получим теперь зависимость высоты подъёма от скорости шара, считая, что в начальный момент оно находилось в начале координат, $z(0)=0$. А скорость шара нами уже найдена как функция времени (2.13). Уравнение (2.12) перепишем в виде

$$vdv/\left(1+\frac{v^2}{v_\infty^2}\right)=-gdz,\ \ z(v_0)=0 \qquad (2.15)$$

Отсюда видно, что высоту подъема можно просто выразить через скорость

$$z(v)=-\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v}\left[v/\left(1+\frac{v^2}{v_\infty^2}\right)\right]dv=\frac{v_\infty^2}{2g}ln\left[\left(1+\frac{v_0^2}{v_\infty^2}\right)/\left(1+\frac{v^2}{v_\infty^2}\right)\right].$$

$$z(0)=h=\frac{v_\infty^2}{2g}ln\left(1+\frac{v_0^2}{v_\infty^2}\right). \qquad (2.16)$$

Для малой начальной скорости $v_0<<v_\infty$ вторая из формул (2.16) преобразуется в известную из школьного курса для высоты подъема $h=v_0^2/2g$ формулу, полученную без учета сопротивления воздуха. Однако при больших скоростях $v_0>>v_\infty$, будем иметь совершенно новый результат $h\sim\frac{v_\infty^2}{g}ln\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$, т.е. получаем высоту, слабо зависящую от начальной скорости и определяемую, в основном, свойствами среды.

Приведённый пример показывает, что понятие установившейся скорости падения перспективно при моделировании движения в сопротивляющейся среде. Это понятие позволяет упростить запись решений, лучше осознать результат. На современном этапе развития наук, когда стали доступными мощные средства вычислений и иллюстрации результатов, основная доля тяжести переносится на описание явления, проведение эксперимента, выявление физических механизмов явления и его математическое описание.

Данное выше описание пригодно лишь для ограниченного диапазона скоростей движения, от 1 см/с до 300 м/с. При более высоких скоростях тел в атмосфере, превосходящих скорость звука, от тела отходят ударные волны. Моделирование становится не корректным без учёта температурных эффектов. Картина сопротивления существенно меняется, такие вопросы изучают уже в газовой динамике [5].

Лекция 3.

Моделирование и расчёт свободных полётов.

Дифференциальные уравнения движения тяжёлого шара, брошенного под углом к горизонту. Интегрирование уравнений с использованием пакета Mathcad. Влияние на характеристики полёта начальной скорости, угла наклона и отношения плотностей. Полёты вулканических бомб и определение начальной скорости их выброса по дальности полёта. Секрет образования песчаного бархана Сарыкум.

Дифференциальные уравнения.

Рассмотрим движение тяжёлого тела, брошенного под углом к горизонту, с учетом сопротивления воздуха. Полагая плотность атмосферы пренебрежимо малой по сравнению с плотностью тела, не будем учитывать выталкивающую архимедову силу, ограничимся учетом силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Выберем координатные оси в плоскости, проведённой через вертикаль и вектор начальной скорости. Ось абсцисс *Ox* направим горизонтально, ось ординат *Oz* – вертикально вверх. Проекции силы тяжести и силы сопротивления на координатные оси могут быть записаны в виде [2]

$$\vec{G} = (0, -mg) \text{ и } \vec{F}_c = c \cdot \frac{1}{2}\rho v^2 S \cdot \left(-\frac{\dot{x}}{v}, -\frac{\dot{z}}{v}\right),$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\,. \qquad (3.1)$$

Знаки минус означают, что сила сопротивления направлена против скорости, а сила тяжести – вертикально вниз. Удобнее ввести установившуюся скорость падения и записать формулу для силы сопротивления воздуха в виде

$$\vec{F}_c = -\frac{mg}{v_\infty^2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}(\dot{x}, \dot{z}),\ v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{c\rho S}} \qquad (3.2)$$

Дифференциальные уравнения движения представятся тогда в виде

$$\ddot{x} = -\frac{g}{v_\infty^2} \cdot \dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2},\ \ddot{z} = -g - \frac{g}{v_\infty^2} \cdot \dot{z}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}. \qquad (3.3)$$

Задача об интегрировании этих уравнений движения приводилась ещё в старинных учебниках по теоретической механике [1], хотя вычислительные средства были слабы. Уравнения (3.3) применялись для тел, близких шару. Коэффициент сопротивления c≈0.4-0.45, начальные условия

зависели от постановки задачи. Интегрирование уравнений сводилось к квадратурам, все параметры решения можно было извлечь из трёх таблиц. Но в настоящее время можно пользоваться пакетом программ Mathcad и получить решение и его визуализацию достаточно быстро и в удобной форме. Начальные условия примем в виде

$$\dot{x}(0) = v_0 cos\alpha,\ \dot{z}(0) = v_0 sin\alpha,\ x(0) = 0,\ z(0) = 0. \qquad (3.4)$$

Здесь начальная скорость по модулю равна v_0 и направлена под углом α к горизонту. Зададимся значениями начальной скорости v_0 и углом наклона α. Примем равным $\alpha=\pi/4$ и определим траекторию движения для v_0= 300 м/с. Из программы вычислений в пакете Mathcad видны все принятые значения параметров: плотность воздуха и породы; радиус шара; ускорение свободного падения, установившаяся скорость падения [4]. Все величины взяты в системе СИ.

$\rho a := 1.2 \quad \rho r := 2500 \quad v0 := 300 \quad \alpha 0 := \frac{\pi}{4}$

$R := 0.2 \quad g := 9.8 \quad u0 := v0\cdot\cos(\alpha 0) \quad w0 := v0\cdot\sin(\alpha 0)$

$vs := \sqrt{\frac{20\cdot\rho r\cdot g\cdot R}{3\cdot\rho a}} \quad vs = 164.992 \quad t1 := \frac{2\cdot w0}{g} \quad t1 = 43.292$

Given

$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{-g}{vs^2}\cdot u(t)\cdot\sqrt{(u(t))^2 + (w(t))^2} \quad u(0) = u0$

$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{-g}{vs^2}\cdot w(t)\cdot\sqrt{(u(t))^2 + (w(t))^2} - g \quad w(0) = w0$

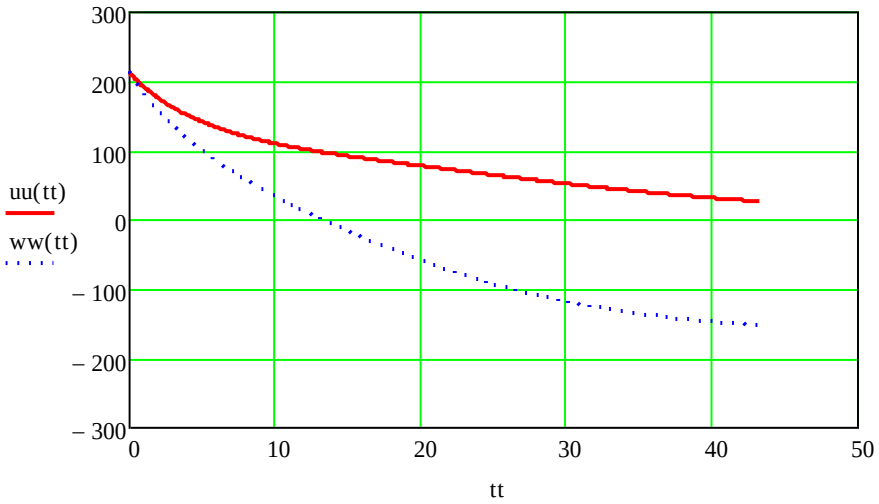
$\frac{d}{dt}x(t) = u(t) \quad x(0) = 0$

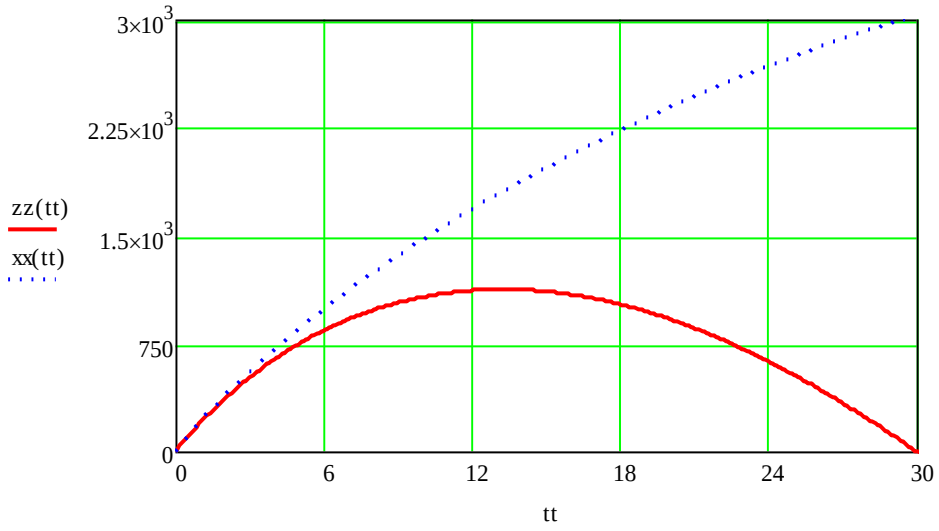
$\frac{d}{dt}z(t) = w(t) \quad z(0) = 0$

$\begin{pmatrix} uu \\ ww \\ xx \\ zz \end{pmatrix} := Odesolve\left[\begin{pmatrix} u \\ w \\ x \\ z \end{pmatrix}, t, t1\right] \quad tt := 0, \frac{t1}{500} .. t1$

$\xi(tt) := u0\cdot tt \quad \eta(tt) := w0\cdot tt - \frac{g\cdot tt^2}{2}$

Здесь обращение к процедуре решения Given/Odesolve проведено как к системе уравнений 1-го порядка. Решение дают функции *uu, ww, xx, zz,* зависящие от одной переменной *tt* при выбранных выше параметрах. Интервал времени *t*1 был выбран так, чтобы его хватило до падения брошенного тела без учёта сопротивления воздуха. Для сравнения с классическим школьным решением введены новые функции времени ξ и η. Ниже на рис. 3.1–3.3 приведено графическое изображение этих функций. Первый рисунок дает зависимость составляющих скоростей от времени. Видно, что вертикальная составляющая убывает быстрее из-за действия силы тяжести. Наивысшей точке соответствует переход через нуль. Второй рисунок дает зависимость от времени горизонтальной и вертикальной координат. Видно, что в момент падения тела (около 30 секунд) тело проходит по горизонтали около 3 км. Третий рисунок дает сравнение траектории при учёте сопротивления воздуха с траекторией без учета этого сопротивления. Видно, что разница колоссальная. Без учёта сопротивлений дальность полета составляет длину, равную $v_0^2/g \approx 9$ км, тогда как с учётом всего 3 км. При больших начальных скоростях, превышающих установившуюся скорость падения, оно всегда так.





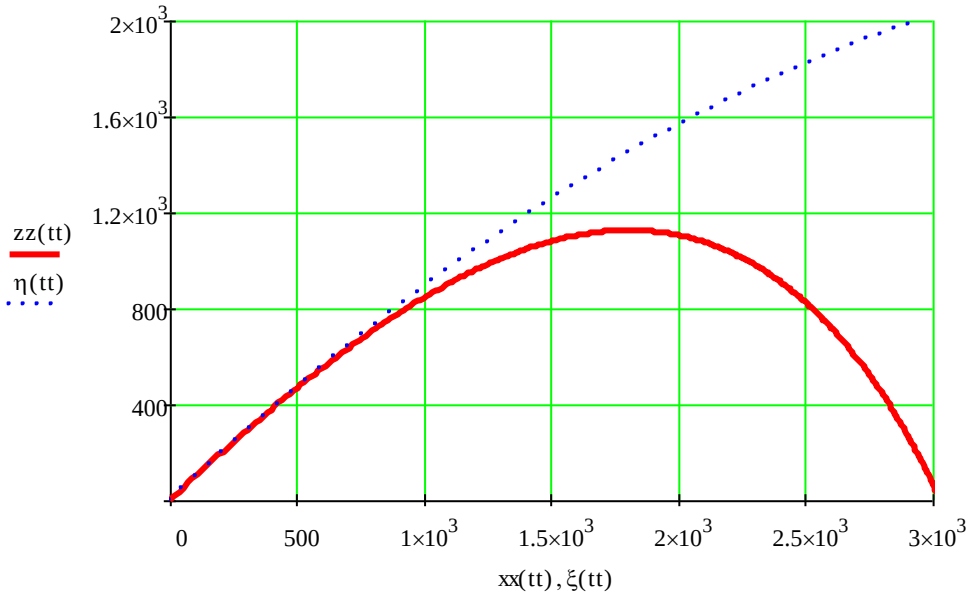
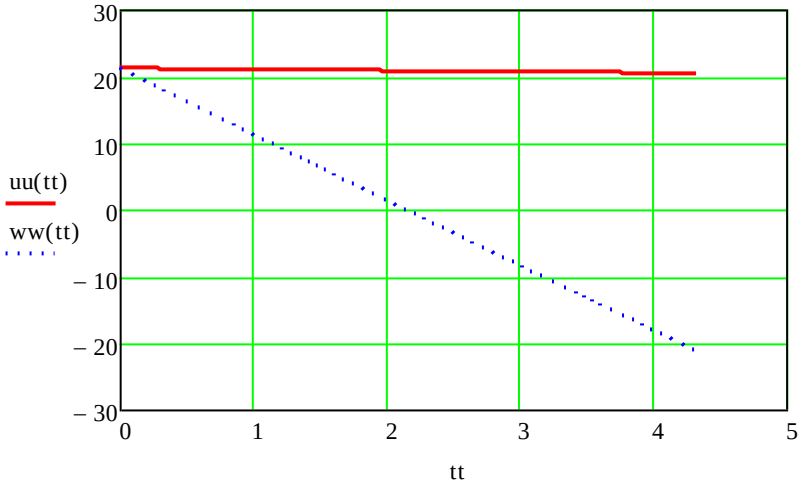
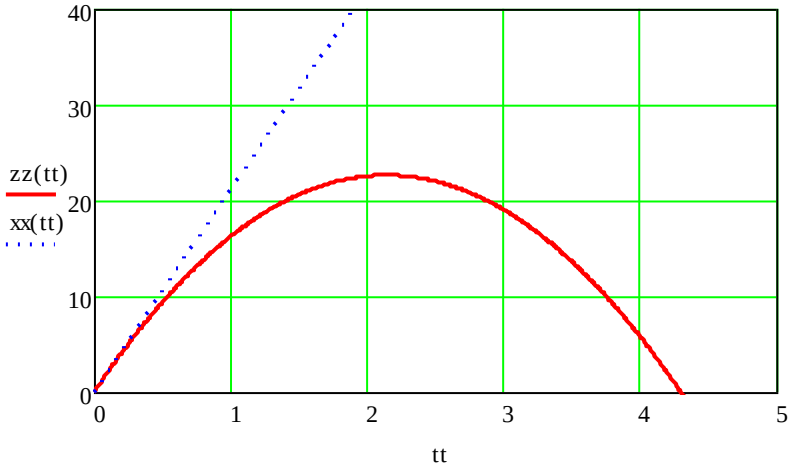


Рис. 3.1-3.3. Полёт тяжёлого шара в сопротивляющейся среде: изменение скорости; координат; траектория. Их сравнение со случаем отсутствия сопротивления среды. Начальная скорость высокая – 300 м/с.

Видоизменения в программе производятся легко, можно поменять начальную скорость, автоматически изменится расчет и иллюстрации. Ниже на рис. 3.4-3.6 показаны те же графики для начальной скорости 30 м/с. Видно, что влияние сопротивления воздуха уже пренебрежимо мало.





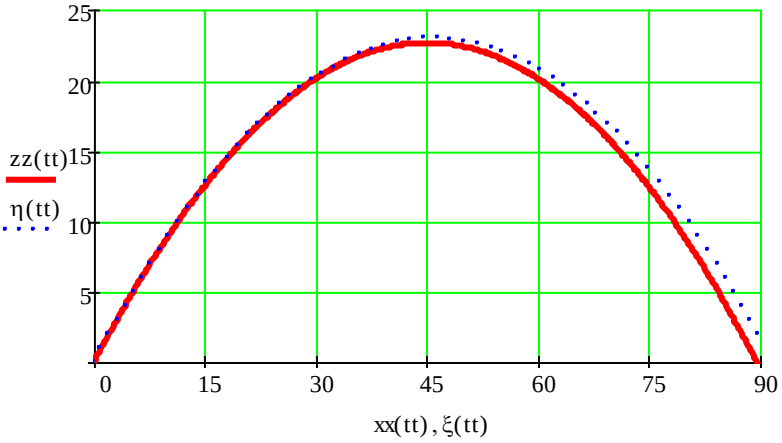


Рис. 3.4-3.6. Иллюстрация малости влияния сопротивления воздуха при небольших скоростях движения тел. Начальная скорость невысокая – 30 м/с.

Видоизменением параметров программы могут быть легко получены результаты для полёта тяжёлых тел, близких к шаровидной форме. Рассмотрим, к примеру, полёты спортивного молота и песчинки.

Молот представляет собой металлический шар диаметра 10.2-12 см, соединённый стальной проволокой с рукоятью. Длина молота у мужчин составляет 117—121.5 см, а общий вес — 7.265 кг. У женщин его длина составляет от 116 до 119.5 см, а общий вес — 4 кг. Вес спортивного молота примерно равен весу ядра, используемого спортсменами соответствующего пола. Спортсмен при метании находится в специальном круге диаметром 2.135 м, в пределах которого он раскручивается и отпускает спортивный снаряд. Рекордсменом по метанию молота является Юрий Седых, его результат 86 м 74 см от 30 августа 1986 года еще никем не превзойден. Какую же начальную скорость при раскручивании сообщил рекордсмен снаряду? Находим её, пока согласно школьным знаниям.

Наибольшая дальность полёта достигается при угле наклона скорости 45° и составляет v_0^2/g. Это означает, что начальная скорость $v_0 = \sqrt{gl}$. Юрий Седых послал молот с начальной скоростью $\sqrt{9.8 \cdot 86.74} = 29.15$ м/с. Это результат без учета сопротивления воздуха. Значимость сопротивления зависит от отношения начальной скорости к установившейся скорости падения в атмосфере. Установившуюся скорость считаем при коэффициенте сопротивления c=0.4 по формуле (2): $v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 7.265 \cdot 9.8}{0.4 \cdot 1.2 \cdot \pi \cdot 0.06^2}} = 161.6$ м/с. Значение скорости велико по сравнению с начальной, погрешность пренебрежения силой сопротивления будет порядка квадрата их отношения, т.е. около $(29/162)^2$=0.032. С учётом сопротивления движению молот был отправлен со скоростью 29.15·1.032≈30 м/с.

Иначе обстоит дело с песчинками малых размеров, которых можно принять за шарики радиуса в доли миллиметра. Здесь установившаяся скорость падения мала и при небольших скоростях сила сопротивления оказывается весьма значимой. Установившаяся скорость падения каменного ядра радиусом 20 см равна 165 м/с, это было получено ранее. Если же радиус равен 0.2 мм, т.е. в 1000 раз меньше, то установившаяся скорость падения составит $\frac{165}{\sqrt{1000}} = 5.22$ м/с. Значит, при скорости более 5 м/с, ветер может поднимать и

уносить песчинки, сначала мелкие и менее плотные, затем крупные и более плотные. Так образуются в пустынях барханы, которые постоянно меняют свой рельеф в зависимости от скорости и направления ветра.

Рис. 3.7. Бархан Сарыкум.

Бархан Сарыкум представляет собой гору окатанного чистого песка, напоминающего насыпной. Расположен он в 20 км от Махачкалы по дороге в Кызыл юрт. Наивысшая точка возвышается над окружающей низменностью на 213 м, площадь основания составляет примерно 600 га. Бархан имеет специфическую форму с заострёнными гребнями, которые перемещаются ветрами то в одном, тио в другом направлении в небольшом диапазоне. Образовался бархан от песчаных пластов возраста 150 млн. лет, пролегание которых видно по долине рядом протекающей реки. Аэродинамика местности способствовало тому, что песок из долины выносился ветрами вверх и откладывался со снижением скорости ветра на поверхность бархана. Можно наблюдать и равнину, засыпанную песком в юго-восточном направлении от бархана. Из-за столкновений с другими песчинками и полетов в воздухе песок приобрёл округлую форму с чистой поверхностью.

Было много сторонников использования этого песка для строительных нужд Махачкалы в 70-ые годы. В защиту бархана выступил Дагестанский госуниверситет. Было придумано много небылиц об особом климате и редком животном мире, были грозные выступления против использования запасов песка бархана для строительства. Споры кончились тем, что

ЮНЕСКО зарегистрировал бархан как памятник природы и рекомендовал её сохранение. Сарыкум самый большой песчаный бархан в Европе, запасы песка оцениваются в 1 млрд. тонн. При лимитированном заборе песка 1000 тонн в день, бархана хватило бы на 1 млн. дней, что составляет 2700 лет с лишним. Интересен вопрос о естественной восстанавливаемости бархана ветрами.

О бархане Сарыкум сложено множество легенд. Одна из них повествует о не разделенной любви. В давние времена два брата близнеца влюбились в красавицу принцессу, которая жила в роскошном замке, построенном посреди глубокого озера. Девушка обожала верховую езду и соколиную охоту, но выбраться из замка на равнину она могла лишь на лодке. Однажды, принцесса объявила, что выйдет замуж за того, кто сумеет превратить озеро в твердую землю. Долго думали братья как им поступить: «Нужно разделиться, я пойду на север, а ты на восток». Один из братьев решил найти кузнеца и купить у него крепкую саблю, чтобы рассечь утесы возле озера и завалить скалами водоем. Второй брат отправился к берегу Каспия с огромным мешком. Он собирался наполнить его песком и засыпать озеро. Через неделю песок был собран и влюбленный юноша отправился в обратный путь. Вскоре раздался страшный грохот. Это первый брат успел вернуться к замку и расколоть скалы. Проигравший спор юноша упал на колени, мешок лопнул, а песок засыпал несчастного, образовав над ним огромную гору.

Жива в народе и другая шуточная легенда. Древний оракул пообещал простить все женские грехи и отправить в рай тех женщин, кто в своих туфельках принесет песок с морского побережья и насыплет его на бархан. Нашлось так много желающих попасть в рай, что бархан стал самым крупным в Европе.

Более интересны задачи о вхождении в атмосферу крупных метеоров. Здесь скорости имеют порядки десятков км/с, вхождение сопровождается образованием ударных волн, значительным разогревом тела и возможным его взрывом. Именно таким было падение Чебаркульского метеорита 15 февраля 2013 года.

Лекция 4.

Модель идеальной жидкости

Жидкость. Понятие идеальной жидкости. Частица жидкости. Массовые и поверхностные силы. Давление в идеальной жидкости, его независимость от ориентации площадки. Скорость и ускорение частицы. Дифференциальные уравнения движения частицы. Уравнение сохранения баланса массы в любом малом объёме. Замкнутая система уравнений движения идеальной жидкости.

Жидкость.

Повседневные наблюдения привели к разделению сплошных сред на твёрдые тела, жидкости и газы. Твёрдые тела сохраняют форму, жидкая среда способна меняет свою форму под действием сколь угодно малых сил, газы не имеют определённой формы, они способны значительно расширяться и сжиматься с изменением давления. В зависимости от температуры и давления вещество может находиться в том или ином состоянии, т.е. в твёрдой, жидкой или газовой фазе. На плоскости давление-температура эти области можно отделить друг от друга своими линиями равновесия. Существуют критические значения параметров, выше которых нельзя назвать определённую фазу. Например, для воды при температурах выше 374°С жидкое и газовое состояние не различимы.

Все жидкости обладают вязкостью: тонкий молекулярный слой жидкости прилипает к поверхности, вдоль которой жидкость движется, соседние слои испытывают сопротивление при взаимном скольжении относительно друг друга. Жидкости обычно подразделяют на две категории: маловязкие (вода, спирт, бензин), где свойством вязкости можно пренебречь в ряде случаев, и высокой вязкости (масла, мазут, расплавы металлов, вулканическая лава), где важно учесть свойство вязкости. Вязкость определяет сопротивление слоёв относительному их движению. Считается, чем более вязкой является жидкость, тем больше сила сопротивления взаимному перемещению слоёв. Вязкость жидкости измеряют экспериментально, создав тонкий однородный слой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Равномерно

вращают внутренний цилиндр и измеряют момент сопротивления движению, и далее связывают его со скоростью относительного движения слоёв поверхности. В идеале, когда вязкость исчезает, считается, что исчезает и сила, которая мешает движению одного слоя по другому, т.е. при отсутствии вязкости возможно скольжение отдельных слоёв без какого-либо сопротивления. Возникновение океанских течений с ограниченным поперечным сечением обусловлено малой вязкостью воды. Современная гидродинамика вводит при описании движения жидкостей и другие их свойства. Есть жидкости вязко-пластичные, вязкоупругие и др.

Под частицей жидкости понимают достаточно малый объём жидкости, чтобы можно было принять основные положения дифференциального и интегрального исчисления. Частица должна вмещать в себя большое количество молекул жидкости. При размере молекул 10^{-8} м, в 1 кубическом микроне их уместится около миллиона. Такого количества достаточно, чтобы принять основные концепции механики сплошной среды для частицы: среда считается неразрывной, изменения её формы в процессе движения непрерывными. Меньшие размеры течений для гидродинамических изучений требуют дополнительного обоснования. Замечено в эксперименте, что в капилляры 0.4 мкм в диаметре вода проникает. Существуют тропические растения, листья которых не промокают. Их поверхность покрыта очень густым волосяным покровом. Движение молекул жидкости или газа по капиллярам размером в нанометры не является объектом изучения гидродинамики капельной жидкости.

Массовые и поверхностные силы.

Под частицей жидкости условимся подразумевать любой односвязный деформируемый объём малого размера, и, в частности, прямоугольный параллелепипед с рёбрами $dx \times dy \times dz$, длины которых бесконечно малы, а координаты центра есть (x,y,z). Массовой силой, которая действует на частицу, является сила тяжести, равная произведению плотности жидкости на её объём. Массовой будет являться и сила инерции этой частицы. При изучении движения в космических масштабах массовыми будут силы тяготения, действующие на частицу.

Поверхностные силы заменяют действие окружающей частицу жидкости на каждую грань. При рассмотрении движения или равновесия частицы как отдельного изолированного тела, связи следует заменить силами, называемыми реакциями. Нашей частице надлежит освободиться от 6 связей, от действия на каждую грань остальной массы жидкости. Поверхностных сил будет 6. В случае вязкой жидкости каждая из этих сил будут иметь не только нормальную к поверхности, но и касательную составляющую. Последняя определяется вязкостью жидкости и тем она больше, чем выше вязкость жидкости. Для идеальной жидкости, вязкость которой равна нулю, касательная составляющая поверхностной силы отсутствует. Поэтому все 6 поверхностных сил направлены по нормали внутрь частицы. Для малой площадки идеальной жидкости отношение поверхностной силы к площади этой поверхности называется давлением в жидкости. Давление есть отнесённая к 1 площадки поверхностная сила, направленная по нормали к выделенной площадке. Единицей измерения давления в системе СИ является Па=Н/м²=(1кг·1м/с²)/м²= кг/(м·с²).

Можно допустить, что для идеальной жидкости давление может зависеть от ориентации выделенной площадки в точке, поэтому определение, данное выше, кажется некорректным. Но справедлива теорема, утверждающая независимость давления от ориентации площадки в любой точке в жидкости. Да, с изменением положения точки, давление меняется, оно представляет собой скалярную величину, зависящую от положения точки и момента времени. Будем обозначать давление буквой p. Выделим частицу жидкости в виде прямоугольной пирамиды, образуемой декартовыми осями координат с бесконечно малыми длинами рёбер dx, dy, dz. Три поверхностные силы, перпендикулярные к граням $0yz, 0zx, 0xy$ пирамиды, представятся в виде: $X=p_x dydz/2$, $Y=p_y dzdx/2$, $Z=p_z dxdy/2$. Четвёртую поверхностную силу обозначим F, давление на эту грань буквой p. Массовыми силами (как сила тяжести или сила инерции) пренебрегаем, они пропорциональны объёму и составляют величины третьего порядка малости, тогда как поверхностные силы имеют второй порядок малости [6]. Вводим ещё углы α, β, и γ, определяющие ориентацию наклонной грани пирамиды к осям $Oxyz$ (рис. 4.1).

Единичная нормаль к наклонной грани имеет проекциями на оси координат значения (cosα, cosβ, cosγ).

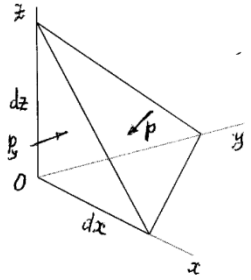


Рис. 4.1. Частица жидкости в виде прямоугольной пирамиды.

Рассмотрим пирамиду как материальную частицу, которая должна удовлетворять условиям равновесия. Это три условия равенства нулю сумм трех проекций сил на координатные оси для сходящейся системы сил. Вдоль оси Oy согласно условиям равновесия, сила Y должна равняться $F{\cdot}\cos\beta$, где β есть угол, образованный нормалью к наклонной грани с осью Oy. В то же время β определяет проекцию площади S наклонной грани на плоскость, перпендикулярную к оси Oy, т.е. площадь прямоугольной грани $S \cdot cos\beta = dx \cdot dz/2$. Поделив эти два равенства, получаем $\frac{F}{S} = \frac{Y}{S_y} = \frac{X}{S_x} = \frac{Z}{S_z}$, что означает равенство давлений для всех граней пирамиды, $p = p_x = p_y = p_z$. Тем самым теорема доказана, идеальной жидкости давление не зависит от выбора направления площадки, т.е. является скалярной величиной.

В школьном курсе физики обычно демонстрируют опыт с воронкой, обтянутой тонкой резиной и снабжённой коленчатой трубкой, выходящей в атмосферу. Погружая глубже воронку, можно убедиться в росте давления по деформации резиновой поверхности. Вращая на той же глубине воронку, можно видеть, что деформация сохраняется, значит, давление от ориентации воронки не зависит. В случае не идеальной, а вязкой или вязко-пластичной жидкости понятие давления вводится намного сложнее. Поверхностные силы не перпендикулярны к выбранной площадке, имеют ещё касательные составляющие.

Силы, действующие на частицу.

Выделим теперь частицу жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда $dx \times dy \times dz$, геометрический центр которой имеет координаты (x, y, z). Центры противоположных граней

имеют координаты, отличающиеся от координат центра частицы на половинки рёбер $(dx/2, dy/2, dz/2)$. Найдём парные суммы поверхностных сил. Вдоль оси *Ox* действуют силы

$$\left(p\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)-p\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\right)dydz=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\,. \qquad (4.1)$$

Аналогично находим, что вдоль других осей суммы дают пропорциональные объёму частицы силы

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz,\ -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz. \qquad (4.2)$$

Кроме этих поверхностных сил, на частицу могут действовать массовые силы, такие как сила тяжести, сила тяготения или силы инерции. Они называются массовыми из-за того, что пропорциональны массе частицы. Иногда их называют и объёмными, после выделения множителем плотности жидкости. Условимся их записывать в виде $\rho dxdydz\cdot(X,Y,Z)$, выделяя как множители плотность и объём. Тогда систему сил, поверхностных и объёмных, можно представить через плотность, давление и объёмную силу вектором

$$dxdydz\cdot\left(\rho X-\frac{\partial p}{\partial x},\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y},\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (4.3)$$

Скорость и ускорение частицы.

Трехмерное течение жидкости будем рассматривать как единое поле скоростей: в каждой пространственной точке определена скорость, являющаяся вектором, и определено давление, являющееся скалярной величиной. Во времени и векторное, и скалярное поле могут меняться. Проекции скорости на координатные оси и давление являются функциями четырёх переменных: $u,\ v,\ w,\ p$ есть функции (x,y,z,t). Если же рассматривать частицу как движущуюся материальную точку, то её координаты x,y,z являются функциями времени t. Определяя ускорение движущейся частицы, мы должны помнить, что проекция скорости на ось зависит от времени сложным образом. Например $u=u(x(t),y(t),z(t),t)$. Чтобы найти проекцию ускорения на ось *Ox*, необходимо дифференцировать по каждой координатной переменной как сложную функцию и явно по времени. Что касается производных координат по времени, то они соответственно равны $\dot{x}(t)=u,\ \dot{y}(t)=v,\ \dot{z}(t)=w$. Поэтому проекции ускорений частицы имеют вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (4.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Эти три формулы могут быть написаны в виде одной для вектора-скорости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \qquad (4.5)$$

Первый член в правой части называется локальной производной по времени, три последующих слагаемых называют конвективными членами. Они вносят в выражение ускорения нелинейность. Нельзя скорость движущейся частицы разложить на 2 составляющие и затем утверждать, что производная суммы равна сумме производных. При увеличении модуля скорости в 2 раза конвективные члены растут не в 2, а в 4 раза.

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости.

Рассматриваем жидкую частицу – прямоугольный параллелепипед с рёбрами *dx, dy, dz* как материальную точку. Введение поверхностных сил освободило частицу от связи её с другими частицами, теперь её можно считать движущейся свободно под действием сил, определённых выражением (4.3). Второй закон Ньютона для жидкой частицы можно написать в виде

$$\rho dxdydz \cdot \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}\right) = dxdydz \cdot \left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x}, \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (4.6)$$

Сократив обе части на массу частицы и подставив значения производных по формулам (4.4), получим уравнения Эйлера для идеальной жидкости (1755 г)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Однако этих уравнений недостаточно для отыскания четырёх неизвестных функций u,v,w,p. Чтобы замкнуть систему, даже в случае несжимаемой жидкости, необходимо ещё одно уравнение. Получим его из условия баланса массы для любого достаточно малого фиксированного объёма пространства: поступившая в объём и покинувшая его масса жидкости должна соответствовать изменению плотности жидкости в этом малом объёме.

Уравнение сохранения баланса массы.

Выделим достаточно малый объём пространства и в математических выражениях представим: поступившую в объём за малое время dt массу жидкости; покинувшую этот объём массу, накопленную за счет изменения плотности массу. В качестве малого объёма берём прямоугольный параллелепипед с рёбрами $dx \times dy \times dz$, геометрический центр которой имеет координаты (x, y, z). Компоненты скорости u, v, w и плотность жидкости на противоположных гранях имеют мало отличающиеся друг от друга значения. Приток и отток массы через противоположные грани по трём осям координат за бесконечно малое время dt можно выразить в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\rho u\big|_{x-dx/2} - \rho u\big|_{x+dx/2}\right) dydzdt,\\
&\left(\rho v\big|_{y-dy/2} - \rho v\big|_{y+dy/2}\right) dxdzdt,\\
&\left(\rho w\big|_{z-dz/2} - \rho w\big|_{z+dz/2}\right) dxdydt.
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

Эти выражения можно упростить по теореме о среднем: приращение функции на малом отрезке равно производной этой функции в некоторой средней точке, помноженной на длину отрезка. У нас уже появятся частные производные, так как функции зависят от многих переменных. Вместо площадей граней появится объём $dx \cdot dy \cdot dz$, так как каждый раз отрезок представляет собой недостающее ребро. Выражения (4.8) преобразуются к виду

$$\left(-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z}, -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z}, -\frac{\partial(\rho w)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z} \right) \cdot dxdydzdt \qquad (4.9)$$

Накопление массы за счет изменения плотности, происшедшее за время *dt*, представится разностью объёма

$$\left(\rho|_{t+dt} - \rho|_t\right)dxdydz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt\,. \qquad (4.10)$$

Выражение (4.10) приравниваем сумме трёх объёмов (4.9).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \qquad (4.11)$$

Это и есть уравнение сохранения массы. Его называют иногда и уравнением неразрывности, подразумевая, что оно теряет силу при образовании пустот или каверн в жидкости.

Уравнения (4.7) и (4.11) замыкают задачу о движении идеальной жидкости, если известен закон изменения плотности от давления, т.е. если жидкость баротропная. Например, для изотермического движения газа плотность и давление пропорциональны друг другу, при адиабатическом движении они связаны показателем адиабаты. Для слабо-сжимаемых жидкостей принимают $\rho = \rho_0[1 + \beta(p - p_0)]$, где β есть сжимаемость жидкости. Для несжимаемых жидкостей β=0, плотность их не зависит ни от координат, ни от времени. Уравнение сохранения массы приобретает наиболее простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4.12)$$

Векторный вид уравнений Эйлера.

Воспользуемся оператором набла, который преобразует скалярную функцию в вектор, и оператором дивергенции, который векторную функцию переводит в скаляр. Согласно общепринятым обозначениям

$$\vec{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad div\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (4.13)$$

Уравнения Эйлера можно собрать в одно векторное уравнение с помощью этих операторов и придать им вид

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p \qquad (4.14)$$

Аналогично, закон сохранения массы (4.11), запишется через дивергенцию

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{\mathbf{v}}\right) = 0 \qquad (4.15)$$

Физики наиболее часто пользуются такой формой записи.

Лекция 5.

Течение вязкой жидкости по круглой трубе.

Течение Куэтта как модель движения в тонком слое. Опытное определение вязкости. Зависимость вязкости от температуры и давления. Прилипание вязкой частицы к стенке. Поверхностные силы и напряжение на площадке. Зависимость напряжения от ориентации площадки. Давление как шаровая составляющая тензора напряжений. Движение вязкой жидкости в прямолинейной круглой трубе. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса как безразмерная характеристика решения. Переход в турбулентный режим. Перепад давления для турбулентного режима. Коэффициент гидравлического сопротивления. Вязко-пластичная жидкость.

Вязкость жидкости.

Основное свойство вязкой жидкости – прилипание её к поверхности. Тонкий молекулярный слой вязкой жидкости прилипает к поверхности, вдоль которой жидкость движется, соседние слои испытывают сопротивление при взаимном скольжении относительно друг друга. Вязкость определяется как величина (скаляр), характеризующая сопротивление слоёв относительному их движению. Чем более вязкой является жидкость, тем больше сила сопротивления взаимному перемещению слоёв. Поскольку характеристики частиц жидкости меняются непрерывно, относительное движение слоёв определяется градиентом скорости в поперечном потоку направлении.

Рассмотрим течение между двумя бесконечными по длине параллельными пластинами, из которых нижняя пластина неподвижна, а верхняя движется со скоростью U вдоль собственного направления. Частицы прилипнут к пластинам, скорость частиц, прилипших к нижней пластинке равна нулю, а

частицы, прилипшие к верхней пластине, будут иметь скорость *U*. Естественно полагать, что скорость в промежуточных точках со временем примут стационарное значение, распределённое для малого зазора между пластинами по линейному закону. Эта гипотеза, оправданная экспериментами. Однако остаются сомнения, связанные с диапазоном изменения параметров эксперимента. Поэтому часто употребляют для такой жидкости термин «ньютонова» жидкость. На рис. 6.1 дано изображение течения вязкой жидкости и приведены основные обозначения .

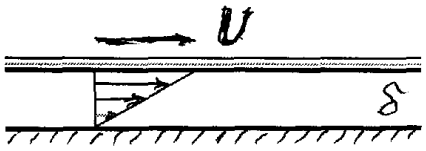


Рис. 5.1. Скольжение пластинки по слою вязкой жидкости малой толщины δ.

Действие верхней пластинки на слой жидкости, согласно определению понятия силы, можно заменить силой *F*. Отношение силы *F* к площади поверхности пластины *S* называют касательным напряжением и обозначают буквой τ. Согласно определению вязкой жидкости, касательное напряжение τ пропорционально отношению скорости *U* пластины к толщине зазора δ между пластинами. Более того, действие одного слоя жидкости на другой слой определяется напряжением τ, которое пропорционально $\tau \sim U/\delta$. На нижнюю пластинку со стороны жидкости действует та же сила *F*. Для удержания её в покое со стороны опор должна быть приложена противоположно направленная сила -*F*. Для касательного напряжения при линейном профиле скорости имеет место формула

$$\tau = \mu \frac{U}{\delta} = \mu \frac{du}{dy}, \quad u(y) = U \frac{y}{\delta}. \tag{5.1}$$

Коэффициент μ, превративший пропорцию в равенство, и есть вязкость жидкости. Очевидно, для тонкого слоя со стационарным течением, когда скорость определена линейным профилем, отношение скорости к толщине зазора можно заменить производной скорости по поперечной координате *y*. Возникает вопрос, как же быть, если профиль скорости нелинейный, да ещё нестационарный, зависящий ещё от

времени. Для слоистых движений вязкой жидкости принимают гипотезу пропорциональности касательного напряжения частной производной по поперечной координате, формулу (5.1) пишут со знаком, в зависимости от рассматриваемой части жидкости

$$\tau = \pm\mu \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (5.2)$$

В случае трёхмерного движения закон (5.2) пишется также в виде линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций жидкой частицы в тензорном виде.

Равенство (5.1) называют законом трения Ньютона. При обработке опытов его можно рассматривать и как равенство, определяющее вязкость μ. Сила измеряется в ньютонах (сообщает массе 1 кг ускорение 1 м/с²), напряжение измеряется в паскалях (Н/м²), из (5.2) получаем, что вязкость измеряется в Па·с. Но эта единица оказывается большой для практически применяемых жидкостей, обычно употребляют мПа·с. В опытах с газами чаще употребляют мкПа·с. Ниже в таблице 1 приведены значения вязкости для воды и воздуха при температурах от 0 до 100°С при атмосферном давлении.

Таблица 5.1. Вязкость воды и воздуха при атмосферном давлении.

Температура, °С	Вязкость воды, мПа·с	Вязкость воздуха, мкПа·с
0	1.83	17.1
10	1.33	17.7
20	1.03	18.3
40	0.668	19.5
60	0.483	20.7
80	0.364	21.9
100	0.289	23.3

Как видно из таблицы, вязкость воды с ростом температуры быстро снижается, а вязкость воздуха медленно возрастает. Вязкость воздуха в 100 раз примерно меньше вязкости воды при низких температурах, и в 10 только раз при температурах выше 100°С. Существует множество формул для аппроксимации зависимости вязкости от температуры и давления. В частности, и я обрабатывал многочисленные экспериментальные данные для вязкости воды, содержащей растворённые соли NaCl. Мною была предложена

аппроксимация вязкости от концентрации солей C % и температуры T°C (результат в мПа·с)

$$\mu(T,C)=\frac{35+0.7C+0.227C^2}{T+15.7} \qquad (5.3)$$

Она была использована неоднократно при проведении расчётов по неизотермическому вытеснению нефти горизонтов месторождения Узень морской холодной солёной водой. Позднее, в Институте проблем геотермии ДНЦ РАН, и другие авторы успешно пользовались (5.3). Для термальной воды с пластовой температурой 40-80°C она имеет достаточную точность.

Установившееся течение вязкой жидкости по круглой трубе.

Рассмотрим, каков должен быть профиль скорости по сечению круглой трубы радиуса R для вязкой жидкости при её слоистом прямолинейном движении. Течение пусть установилось во времени, профиль скорости для всех поперечных сечений трубы один и тот же. Движение происходит под действием перепада давления $\Delta p=p_1-p_2$, где p_1 и p_2 соответственно значения давления на входе в трубу и выходе из неё. Естественно считать, что падение давления вдоль трубы должно быть равномерным, ибо нет причин для неравномерного падения давления. Физические опыты также показывают равномерное снижение давления вдоль горизонтальной трубы. Профиль скорости будет осесимметричным, зависящим от расстояния рассматриваемой жидкой частицы от оси симметрии. Если рассматривать распределение скорости по поперечному сечению, наибольшую скорость имеют частицы на оси, нулевую – частицы, прилипшие к внутренней поверхности трубы.

Выделим цилиндр переменного радиуса r внутри трубы, ось которого совпадает с осью трубы. На оси цилиндра скорость максимальна, на внешней поверхности скорость равна $u(r)$. Цилиндр находится в равновесии под действием поверхностных сил, которые направлены вдоль оси трубы противоположно течению [7]. Сила тяжести перпендикулярна направлению течения, её не вводим. На выделенный цилиндр, по торцам его, действуют две силы, которые в сумме дают произведение разности давлений $\Delta p=p_1-p_2$ на площадь поперечного сечения πr^2. По всей поверхности цилиндра

действует касательное напряжение, равное τ, которое при суммировании даёт силу $2\pi rl \cdot \tau$. Приравнивая сумму сил нулю, будем иметь $(p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi rl\tau = 0,\ \tau = \mu\frac{du}{dr} < 0.$

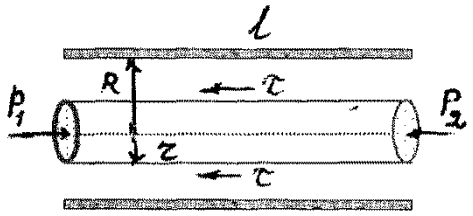


Рис. 5.2. Напряжения, действующие на соосный с трубой цилиндр жидкости.

Поскольку скорость убывает с ростом расстояния от оси *r,* то значение касательного напряжения отрицательно, оставшаяся пристеночная жидкость тормозит движение выделенного цилиндра. Подставив значение τ, получаем для определения распределения скоростей по радиусу задачу

$$\frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r, \quad u(R) = 0. \tag{5.4}$$

Интегрирование приводит к параболическому профилю скорости

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right). \tag{5.5}$$

Максимальное значение скорости достигается на оси трубы и составляет

$$u(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2. \tag{5.6}$$

Оно пропорционально квадрату радиуса трубы. Вычисление расхода *Q* по трубе можно провести интегрированием по радиусу *r* от нуля до *R,*

$$Q = \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \tag{5.7}$$

Полученная для расхода формула носит название формулы Пуазейля. Она показывает, что перекачка по трубам большего радиуса должна быть выгоднее, ибо с ростом радиуса происходит рост расхода в четвёртой степени от радиуса.

Двукратное увеличение радиуса, при том же перепаде давления, даёт 16-ти кратный рост расхода.

Формула (5.7) претерпела многочисленные экспериментальные проверки. Обнаружилось, что она оправдывается в ограниченном диапазоне изменения параметров, для малых радиусов труб и небольших средних скоростей движения. Для труб большого диаметра и при значительных скоростях формула Пуазейля не пригодна. Она годится для трубок малых радиусов, капиллярных каналов, или при больших значениях вязкости. Критерий применимости должен выражаться в безразмерной форме. Рассмотрим, какие безразмерные комбинации параметров можно составить из исходных величин, характеризующих движение по трубе.

Число Рейнольдса.

В качестве исходных параметров, которые определят диапазон справедливости принятой гипотезы о слоистом характере движения, выберем: диаметр трубы как геометрический размер, чаще употребляемый инженерами; вязкость и плотность как характеризующую жидкость; среднюю скорость движения по сечению трубы вместо градиента давления. В нашем случае слоистого прямолинейного течения средняя по сечению скорость равна половине осевой скорости

$$\upsilon = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l} \,. \qquad (5.8)$$

Включение в число определяющих параметров средней по сечению трубы скорости равносильно введению отношения перепада давления к длине трубы (градиента давления). Из определяющих параметров ρ, μ, d и υ можно составить одну единственную безразмерную комбинацию – число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon d}{\mu}, \quad d = 2R. \qquad (5.9)$$

Обработка экспериментов разных авторов показала, что формула Пуазейля оправдывается для диапазона чисел Рейнольдса $0<\mathrm{Re}<2100 \div 2300$. При числах Рейнольдса выше 2300 режим течения становится турбулентным.

Прежде чем применять для расчётов формулу (5.8), следует проверить критерий ламинарности течения. Например, при течении солёной воды с вязкостью 1 мПа·с в

прямолинейной круглой трубке радиусом в 1 мм со средней скоростью 1 м/с, плотности 1000 кг/м^3, и для числа Рейнольдса получаем значение 2000, что близко к границе ламинарного режима течения.

Скорость в 1 м/с – это не есть большая скорость, обычно пешеход имеет такую скорость. Ветер скорости в 1 м/с не замечается, но речной поток со скоростью в 1 м/с–это достаточно серьёзная помеха тому, кто переходит его вброд. Для атмосферного воздуха плотность равна 1.2 кг/м^3, тогда как для воды 1000 кг/м^3. И число Рейнольдса для воды соответственно больше. Турбулентность в более плотных жидкостях наступает раньше, чем в менее плотных, при прочих одинаковых условиях.

Турбулентный режим течения.

Было множество попыток описать турбулентный режим движения в трубах. При высоких скоростях, как показывает раскрашенный в разные цвета поток жидкости (есть такой снятый французами фильм), вместо ровных линий тока наблюдается появление вихрей и перемешивание хаотического порядка. Наиболее признанным является подход Прандтля, в котором вводится механизм обмена энергией между жидкими частицами. Удовлетворительных результатов добываются введением вместо молекулярной вязкости μ турбулентной вязкости, при котором касательное напряжение пропорционально квадрату поперечного градиента скорости. Вводится также понятие характерного пути перемешивания. Как показывает эксперимент, при турбулентном движении профиль скорости является более полным, возле стенок рост скорости происходит гораздо быстрее, чем в ламинарном случае. При Re~10^4 и более перепад давления становится пропорциональным квадрату расхода, а не первой степени, как в ламинарном случае.

Для инженерных расчётов перепада давления Δp в круглой трубе при известной средней скорости течения υ принимают формулу Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \upsilon^2 l}{2d}, \qquad (5.10)$$

где λ – так называемый коэффициент гидравлического сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса Re и

шероховатости трубы. В ламинарном случае для гладких труб формула (6.8) тоже может быть преобразована к виду (6.10) с гидравлическим сопротивлением λ, зависящем только от числа Рейнольдса *Re*

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8\mu\upsilon l}{R^2} = \frac{32\mu\rho\upsilon^2 l}{\rho\upsilon d^2}$$

$$= \frac{64\mu}{\rho\upsilon d}\cdot\frac{\rho\upsilon^2 l}{2d} = \frac{64}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\rho\upsilon^2 l}{2d}, \quad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (5.11)$$

На рис. 5.3 приведены экспериментально найденные значения λ в зависимости от числа Рейнольдса для различных значений шероховатости.

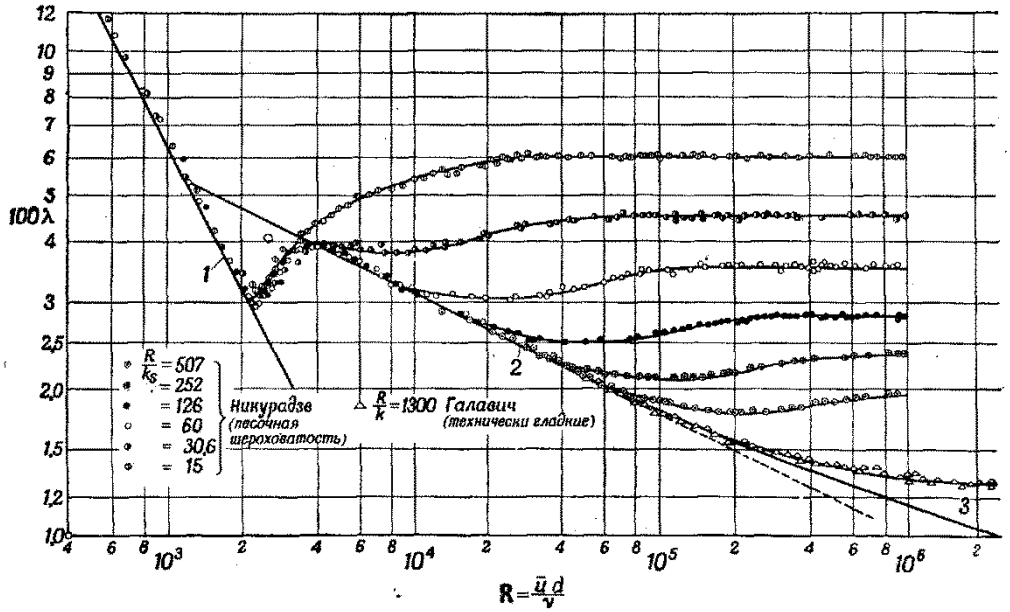


Рис. 5.3. Коэффициент гидравлического сопротивления прямолинейных труб, заимствованный из книги *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: ИИЛ, 1956. 528 с. По оси абсцисс отложены числа Рейнольдса, по оси ординат отложено 100λ.

Вязко-пластичная жидкость.

В случае густых жидкостей, таких как смазочные масла, тесто, фарш, вулканическая лава, разного рода пасты и кремы, модель вязкой жидкости не оправдывается, особенно при малых перепадах давления. Такие жидкости при малых воздействиях ведут себя как твёрдые или упругие тела, не текут. Течение в трубах возникает лишь при достижении определённого градиента давления. Он должен быть таким, чтобы касательное напряжение на стенке трубы было достаточным, чтобы «срезать» от стенки трубы жидкое ядро.

Для описания физической модели вводят начальное напряжение сдвига τ_0. Оно зависит от свойств самой жидкости. Его значение не велико, порядка 10 Па. При бурении скважин применяют глинистый раствор, достаточно густой и тяжёлый, чтобы с собой мог вынести от забоя до устья обломочный материал. Движение бурового раствора описывается моделью вязко-пластичной жидкости.

Рассмотрим напряжённое состояние для цилиндра радиуса r, вырезанного соосно из трубы радиуса R, в которой покоится или по которой течёт вязко-пластичная жидкость. На рис. 5.3 изображён такой цилиндр, расположенный горизонтально. Силы тяжести не рассматриваем. Движение ламинарное стационарное и слоистое, каждое значение r имеет свою скорость, зависящее от радиуса и гладко меняющееся с изменением радиуса. В частности, жидкость может и покоиться, но находиться в напряжённом состоянии. На торцы цилиндра действует лишь давление, на боковую поверхность действует касательное напряжение.

Пусть на левый торец действует давление p_1, действующая сила составит $p_1 r^2$, пусть на правый конец действует давление p_2, а сила составит $p_2 r^2$ и будет действовать в противоположном направлении. Будем полагать $p_1 > p_2$, движение происходит слева направо. Касательное напряжение обозначим τ, оно одинаково на всей поверхности цилиндра, ибо картина течения одинаково в любом сечении. При длине цилиндра l касательные напряжения создадут силу $2\pi r l \cdot \tau$, направленную справа налево. Движение равномерно, ускорений нет, условие равновесия имеет тот же вид, что и в статике. Оно может быть написано в виде (рис. 5.2)

$$\left(p_1 - p_2\right) \cdot \pi r^2 = 2\pi r l \cdot \tau, \quad \textit{или} \quad \tau = \frac{p_1 - p_2}{2l} r \,. \qquad (5.12)$$

Полученная формула показывает, что по сечению распределение касательного напряжения пропорционально расстоянию от оси трубы: на оси оно равно нулю; с удалением от оси оно возрастает линейным образом. Причём это верно для напряжённого состояния в жидкости независимо оттого, движется равномерно жидкость или она находится в напряжённом состоянии покоя. Формулу (5.12) можно применять как для ядра течения, движущегося как твёрдое тело, так и для приграничного слоя течения, по которому

скользит ядро. Скачки касательного напряжения в жидкости отсутствуют, напряжение меняется гладко.

Согласно определению, движение вязко-пластичной жидкости возможно лишь при условии, что касательное напряжение превышает τ_0. Это значение сначала может быть достигнуто только на внутренней поверхности трубы, т.е. $r = R$. Условие возникновения движения в трубе, как следует из (5.12), запишется в виде

$$\tau > \tau_0, \quad или \quad G = \frac{p_1 - p_2}{l} > \frac{2\tau_0}{R} = G_0 . \tag{5.13}$$

Значение градиента давления G_0 называют начальным или предельным градиентом. Для начала движения вязко-пластичной жидкости по трубе нужно обеспечить перепад давления, превышающий произведение начального градиента на длину трубы. Определить касательное напряжение сдвига и начальный градиент можно по U-образной трубке, которую медленно, под действием силы тяжести, заполняют жидкостью. В процессе остановок такого заполнения можно видеть, что уровень в трубках в покое разный, в добавляемой части трубки уровень оказывается чуть выше. По установившейся разности h уровней левой и правой трубок определяем разность давлений, $\Delta p = \rho g h$. Затем, разделив её на заполненную длину l трубки, находим начальный градиент G_0.

Например, в одном из опытов с моделью парафинистой нефти диаметр трубки составлял $d = 0.02$ м, плотность нефти $\rho = 860$ кг/м^3, разность уровней $h = 0.028$ м при общей заполненной длине $l = 0.36$ м. Применив условие равновесия $\pi R^2 \cdot \rho g h = 2\pi R l \cdot \tau_0$, получаем для начального касательного напряжения сдвига τ_0 формулу

$$\tau_0 = \frac{\rho g h d}{4l}, \tag{5.14}$$

что после расчётов приводит к значению τ_0 =3.28 Па. Оно мало по сравнению с атмосферным давлением, но сказывается на характеристиках течения, особенно для трубок малого диаметра.

Для ламинарного установившегося течения вязко-пластичной жидкости связь касательного напряжения с поперечным градиентом скорости принимают в виде, представляющем обобщение такой же связи для вязкой

жидкости. К касательному напряжению вязкой жидкости (5.2) добавляют начальное напряжение сдвига τ_0. В области течения всегда $\tau > \tau_0$.

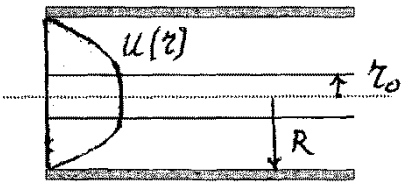


Рис. 5.4. Ядро вязко-пластичного течения и параболический профиль скорости в кольцевой области.

В слоисто-кольцевом течении по трубе радиуса R вязко-пластичной жидкости характерным является наличие ядра вдоль оси, движущегося как твёрдое тело. В ядре $0 < r < r_0$ все частицы движутся с одной и той же скоростью, $u(r) = u_0$. Граница ядра определяется условием равенства касательного напряжения начальному касательному напряжению $\tau = \tau_0$, или из условия равновесия (5.12)

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{2l} r_0 = \frac{1}{2} G r_0, \quad \textit{откуда} \quad r_0 = \frac{2\tau_0}{G}. \tag{5.15}$$

Что же касается кольцевой области, то здесь касательные напряжения растут от τ_0 до максимального своего значения на стенке трубы, когда $r = R$. В области кольцевого течения $r_0 < r < R$ для касательного напряжения принимают

$$\tau = \tau_0 - \mu \frac{du}{dr} \tag{5.16}$$

Здесь μ – вязкость жидкости, иногда её называют структурной вязкостью и обозначают буквой η. Знак минус взят с учётом того, что скорости частиц жидкости убывают от ядра к внутренней поверхности трубы, где имеет место условие прилипания, и значение скорости $u(R) = 0$. Что же касается поверхности ядра течения, то здесь значение производной скорости по радиусу равно нулю, $u'_r(R) = 0$. Таким образом, для профиля скорости в движущемся слое имеем два тривиальных условия: скорость равна нулю на стенке трубы, и производная скорости равно нулю на границе с ядром, что обеспечивает гладкое сопряжение профиля скорости кольцевого течения с ядром.

Для нахождения профиля скорости кольцевого сечения воспользуемся условием равновесия сил (5.12), которое верно для соосного цилиндра любого радиуса $0 < r < R$. Подставив (5.16) в (5.12), получим задачу

$$\tau_0 - \mu \frac{du}{dr} = \frac{Gr}{2}, \quad r_0 < r < R, \quad u(R) = 0, \quad u'(r_0) = 0 \qquad (5.17)$$

Здесь $G = (p_1 - p_2)/l$ –поддерживаемый градиент давления, который больше начального градиента сдвига G_0. Профиль скорости находим интегрированием в кольцевой области с учётом условия прилипания, что дает соотношение

$$\tau_0 (r - R) - \mu \cdot u(r) = \frac{G}{4}\left(r^2 - R^2\right) \qquad (5.18)$$

Воспользуемся вторым условием (5.17) для гладкого сопряжения профиля скорости с ядром течения и находим скорость ядра, приравняв нулю производную в формуле (5.12) и подставив значение $r_0 = 2\tau_0/G$ в (5.18), или же, используя (5.15). Получим для скорости ядра

$$u_0 = u(r_0) = \frac{G}{4\mu}(R - r_0)^2 = \frac{GR^2}{4\mu}(1-\varepsilon)^2, \quad \varepsilon = \frac{r_0}{R} = \frac{G_0}{G}. \qquad (5.19)$$

При ε→0 поправка на пластичность исчезает, и скорость ядра совпадает с осевой скоростью движения вязкой жидкости. Распределение скорости по слою от ядра до поверхности трубы можно представить в виде

$$u(r) = \frac{G}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) - \frac{\tau_0}{\mu}(R - r), \quad r_0 < r < R. \qquad (5.20)$$

Распределение скоростей показывает, что от профиля скорости вязкой жидкости (парабола) отсекается в кольцевой области линейный профиль.

Теперь, когда распределение скоростей известно, можно вычислить расход по трубе. Найдём сначала расход Q_0, обеспечиваемый движением ядра. Для этого достаточно скорость ядра умножить на площадь сечения $\pi r_0^2 = \pi \varepsilon^2 R^2$. Получим

$$Q_0 = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} \cdot 2\varepsilon^2 (1-\varepsilon)^2 = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} f_0(\varepsilon). \qquad (5.21)$$

Сравнивая эту формулу с формулой Пуазейля, видим, что она отличается наличием положительного множителя $f_0(\varepsilon) = 2\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2$, максимум которого при ε=1/2 равен 1/8.

Расход Q_c кольцевого слоя от ядра до внутренней поверхности трубы находим интегрированием профиля (5.20). После ряда преобразований, имеем

$$Q_c = \int_{r_0}^{R} 2\pi r \cdot u(r)\, dr = \frac{\pi G}{8\mu}\left(R^2 - r_0^2\right)^2 - \frac{\pi \tau_0}{3\mu}\left(R - r_0\right)^2\left(R + 2r_0\right) \qquad (5.22)$$

Здесь тоже удобнее ввести вместо радиуса ядра безразмерную величину ε и вместо τ_0 ввести радиус ядра с градиентом давления, $r_0 = \varepsilon R, \tau_0 = \frac{G r_0}{2} = \frac{\varepsilon G R}{2}$. Тогда можно вынести множителем расход по Пуазейлю и привести (5.22) к виду

$$Q_c = \frac{\pi R^4 G}{8\mu}(1-\varepsilon)^3\left(1+\frac{5}{3}\varepsilon\right) = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} f_c(\varepsilon). \qquad (5.23)$$

Формулы (5.21) и (5.23) удобны тем, что показывают относительные доли расходов, обеспечивающиеся ядром скольжения и пристеночным слоем. На рис. 5.4 показаны эти доли, но в сумме они не дают 1, так как отнесены к расходу вязкой жидкости, а не вязко-пластичной.

Складывая (5.21) и (5.23), получим общий расход Q. После упрощений

$$Q = \frac{\pi R^4 G}{8\mu}\left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^4\right) = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} f(\varepsilon). \qquad (5.24)$$

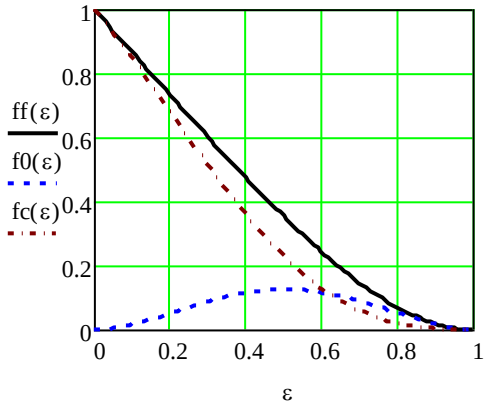


Рис. 5.5. Расход вязко-пластичной жидкости по трубе в сравнении с расходом вязкой жидкости (верхняя линия) и доли расхода по ядру течения (нижняя симметричная линия) и по кольцевому слою (штрих-пунктирная линия) .

Из рисунка видно, что при малых ε основная часть расхода приходится на кольцевую область течения. Для случаев, когда ε<0.5, четвертой степенью ε можно и пренебречь, погрешность не выше процента, и формулу для расхода принимают в укороченном виде, без четвёртой степени параметра ε.

Лекция 6.

Уравнения движения вязкой жидкости.

Поверхностные силы и тензор напряжений. Зависимость тензора напряжений от ориентации площадки. Симметричность тензора. Понятие давления для вязкой жидкости как шаровой составляющей тензора напряжений. Тензор скоростей деформаций. Закон Стокса о линейной связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций. Замкнутая система уравнений движения вязкой жидкости.

Поверхностные силы и тензор напряжений для вязкой жидкости.

Под частицей жидкости снова подразумеваем прямоугольный параллелепипед с рёбрами $dx \times dy \times dz$, длины которых бесконечно малы, а координаты центра есть (x, y, z). Поверхностные силы заменяют действие окружающей частицу жидкости на каждую грань. Поверхностных сил будет 6, по одной на каждую грань. В случае вязкой жидкости каждая из этих сил будут иметь не только нормальную к поверхности составляющую, но и касательную составляющую, которая тем она больше, чем выше вязкость жидкости. Для малой площадки вязкой жидкости отношение поверхностной силы к площади этой поверхности называется напряжением на площадке. Напряжение на площадке является вектором и зависит от ориентации площадки для всех малых площадок с центром в этой точке. Напряжение обычно представляют в виде трёх составляющих: одной, перпендикулярной к площадке и направленной внутрь частицы; и двух, лежащих на этой площадке и перпендикулярных друг к другу. Таким образом, на каждую из 6 граней частицы действуют одна нормальная и две тангенциальные составляющие напряжения. Единицей измерения напряжения служит Па=Н/м².

Для вязкой жидкости значения напряжений зависят от ориентации выделенной площадки в точке [7-8]. Введём удобные обозначения для напряжений, и определим связь между напряжениями на гранях, перпендикулярных осям координат, и произвольно ориентированной площадкой,

нормаль к которой образует с координатными осями углы (α,β,γ). Напряжения на площадках будут векторами, направленными внутрь частицы, ибо при малой вязкости напряжение должно в пределе быть равно давлению идеальной жидкости. Напряжения на гранях будут меняться из-за изменения координат центров граней и их ориентации. Выберем прямоугольную декартову систему и введём следующие обозначения для граней с центром в фиксированной точке (x,y,z): $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ – напряжения на малых площадках, перпендикулярных осям *Ox*, *Oy*, *Oz*. Напряжения эти разложим по координатным осям и введём обозначения проекций согласно формулам

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= p_{xx} \cdot \vec{i} + p_{xy} \cdot \vec{j} + p_{xz} \cdot \vec{k} \\ \vec{p}_y &= p_{yx} \cdot \vec{i} + p_{yy} \cdot \vec{j} + p_{yz} \cdot \vec{k} \\ \vec{p}_z &= p_{zx} \cdot \vec{i} + p_{zy} \cdot \vec{j} + p_{zz} \cdot \vec{k} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

В правой части первый индекс означает ось, которой перпендикулярна площадка, второй индекс указывает ось, на которую проецировано напряжение. Одинаковые индексы получаются у нормальных к площадкам напряжений, смешанные индексы соответствуют касательному напряжению, спроецированному на другие оси. Например, p_{xy} означает касательную составляющую напряжения на площадке, перпендикулярной к оси *Ox*, и направленную вдоль оси *Oy*.

Рассмотрим матрицу, составленную из проекций напряжений на три взаимно-перпендикулярные малые площадки в плоскостях *Oyz, Ozx* и *Oxy* в одной и той же точке пространства (x,y,z), т.е. матрицу

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

Эта матрица носит название тензора напряжений. Оказывается, при повороте координатных осей матрица преобразуется по правилам, свойственным тензорам. Заданием матрицы (6.2) определяется и напряжение на любой другой малой площадке, выбранной в той же точке (x,y,z).

Выделим частицу жидкости в виде прямоугольной пирамиды, образуемой декартовыми осями координат с очень

малыми длинами рёбер dx, dy, dz. Изменение длин этих рёбер меняет ориентацию площадки. Массовыми силами (как сила тяжести или сила инерции) пренебрегаем, ибо они малы по сравнению с поверхностными силами на порядок. Вводим ещё три угла (α,β,γ), определяющие ориентацию наклонной грани пирамиды к осям $Oxyz$ (рис. 6.1).

Выделенная пирамида должна удовлетворять условиям равновесия. Это три условия равенства нулю сумм трех проекций сил на координатные оси для сходящейся системы сил. По трём условиям и определятся три неизвестные проекции напряжений на наклонной грани. Обозначим, как и ранее, S_x, S_y, S_z и S площади граней пирамиды, перпендикулярных соответствующим осям и площадь наклонной грани. Между площадями граней имеет место зависимость

$$S_x = Scos\alpha,\ S_y = Scos\beta,\ S_z = Scos\gamma. \qquad (6.3)$$

Действующие на координатные грани силы представляют собой произведения на площади S_x, S_y, S_z соответствующих напряжений (6.1). Неизвестная, действующая на наклонную грань площади S сила равна произведение напряжения на этой грани $\vec{p}_n = p_{nx} \cdot \vec{i} + p_{ny} \cdot \vec{j} + p_{nz} \cdot \vec{k}$. Буквой $\vec{n}$ будем обозначать внутреннюю для пирамиды нормаль к наклонной плоскости, как и единичные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ для не наклонных координатных граней. Равенство нулю суммы всех поверхностных сил означает, что $\vec{p}_n S + \vec{p}_x S_x + \vec{p}_y S_y + \vec{p}_z S_z = 0$. Разделив на S, получаем

$$\vec{p}_n = -\vec{p}_x cos\alpha - \vec{p}_y cos\beta - \vec{p}_z cos\gamma\ . \qquad (6.4)$$

Эта формула и определяет зависимость напряжения на косой площадке в зависимости от её ориентации. Для определения нормальной составляющей к наклонной площадке можно умножить (6.4) скалярно на единичный вектор внутренней нормали $(-cos\alpha, -cos\beta, -cos\gamma)$. Получаем

$$\boldsymbol{p_{nn}} = (\vec{p}_n \cdot \vec{n}) = \left(-\vec{p}_x cos\alpha - \vec{p}_y cos\beta - \vec{p}_z cos\gamma\right) \cdot$$

$$\left(-\vec{i}cos\alpha - \vec{j}cos\beta - \vec{k}cos\gamma\right) \qquad (6.5)$$

Выделим теперь частицу в виде прямоугольного параллелепипеда $dx \times dy \times dz$, геометрический центр которого имеет координаты (x, y, z). Центры противоположных граней имеют координаты, отличающиеся от (x, y, z) на половинки длин рёбер, т.е. на $dx/2, dy/2, dz/2$ соответственно.

Найдём сумму всех поверхностных сил. Вдоль оси Ox действуют силы

$$\left(p\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)-p\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\right)dydz=-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\,. \quad (6.6)$$

Аналогично находим, что вдоль других осей суммы дают пропорциональные объёму частицы силы

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz,\ -\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz. \quad (6.7)$$

Кроме этих поверхностных сил, на частицу могут действовать массовые силы, такие как сила тяжести, сила тяготения или силы инерции. Они называются массовыми из-за того, что пропорциональны массе частицы. Иногда их называют и объёмными, после выделения множителем плотности жидкости. Условимся их записывать в виде $\rho dxdydz\cdot(X,Y,Z)$, выделяя как множители плотность и объём. Тогда систему сил, поверхностных и объёмных, можно представить через плотность, давление и объёмную силу вектором

$$dxdydz\cdot\left(\rho X-\frac{\partial p}{\partial x},\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y},\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}\right). \quad (6.8)$$

Скорость и ускорение частицы.

Трехмерное течение жидкости будем рассматривать как единое поле скоростей: в каждой пространственной точке определена скорость, являющаяся вектором, и определено давление, являющееся скалярной величиной. Во времени и векторное, и скалярное поле могут меняться. Проекции скорости на координатные оси и давление являются функциями четырёх переменных: $u,\ v,\ w,\ p$ есть функции переменных (x,y,z,t). Если же рассматривать частицу как движущуюся материальную точку, то её координаты $x,\ y,\ z$ являются функциями времени t. Определяя ускорение движущейся частицы, мы должны помнить, что проекция скорости на ось зависит от времени сложным образом. Например, $u=u(x(t),y(t),z(t),t)$. Чтобы найти проекцию ускорения на ось Ox, необходимо дифференцировать по каждой координатной переменной как сложную функцию и явно по времени. Что касается производных координат по времени, то они соответственно равны $\dot{x}(t)=u,\ \dot{y}(t)=v,\ \dot{z}(t)=w$. Поэтому проекции ускорений жидкой частицы имеют вид:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \quad (6.9)$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Эти три формулы могут быть написаны в виде одной для вектора-скорости

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \quad (6.10)$$

Первый член в правой части называется локальной производной по времени, три последующих слагаемых называют конвективными членами. Они вносят в выражение ускорения нелинейность. Нельзя скорость движущейся частицы разложить на 2 составляющие и затем утверждать, что производная суммы равна сумме производных. При увеличении модуля скорости в 2 раза конвективные члены растут не в 2, а в 4 раза.

Уравнения движения вязкой жидкости.

Рассматриваем жидкую частицу – прямоугольный параллелепипед с рёбрами *dx, dy, dz* как материальную точку. Введение поверхностных сил освободило частицу от связи её с другими частицами, теперь её можно считать движущейся свободно под действием сил, определённых выражением (4.4). Второй закон Ньютона для жидкой частицы можно написать в виде

$$\rho dxdydz \cdot \frac{d}{dt}(u, v, w) = dxdydz \cdot \left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u, \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta v, \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Delta w\right). \quad (6.11)$$

Сократив обе части на массу частицы и подставив значения производных по формулам (4.9), получим уравнения Навье-Стокса для вязкой жидкости (1843-1845)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\Delta w\ .$$

Однако этих уравнений недостаточно для отыскания четырёх неизвестных u, v, w, p. Чтобы замкнуть систему, даже в случае несжимаемой жидкости, необходимо ещё одно уравнение. Получим его из условия баланса массы для любого достаточно малого фиксированного объёма пространства: поступившая в объём и покинувшая его масса жидкости должна соответствовать изменению плотности жидкости в этом объёме.

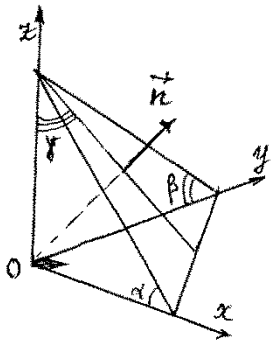


Рис. 6.1. Пирамидальная частица.

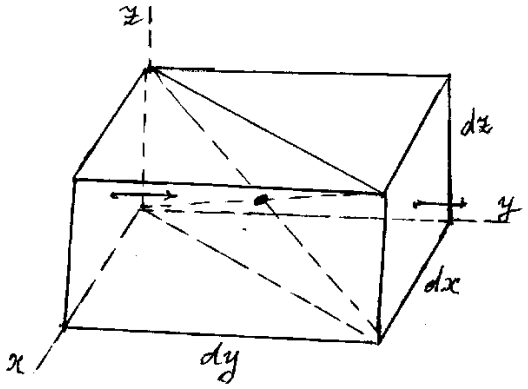


Рис. 6.2. Частица-параллелепипед.

Уравнение сохранения баланса массы.

Выделим достаточно малый объём пространства и в математических выражениях представим: поступившую в объём за малое время dt массу жидкости; покинувшую этот объём массу, накопленную за счет изменения плотности массу. В качестве малого объёма берём прямоугольный параллелепипед с рёбрами $dx \times dy \times dz$, геометрический центр которой имеет координаты (x, y, z). Компоненты скорости u, v, w и плотность жидкости на противоположных гранях имеют мало отличающиеся друг от друга значения. Приток и отток массы через противоположные грани по трём осям координат за бесконечно малое время dt можно выразить в виде (рис. 6.2)

$$\begin{aligned}
&\left(\rho u\big|_{x-dx/2} - \rho u\big|_{x+dx/2}\right) dydzdt,\\
&\left(\rho v\big|_{y-dy/2} - \rho v\big|_{y+ey/2}\right) dxdzdt,\\
&\left(\rho w\big|_{z-dz/2} - \rho w\big|_{z+dz/2}\right) dxdydt
\end{aligned} \qquad (6.13)$$

Эти выражения можно упростить по теореме о среднем: приращение функции на малом отрезке равно производной

этой функции в некоторой средней точке, помноженной на длину отрезка. У нас уже появятся частные производные, так как функции зависят от многих переменных. Вместо площадей граней появится объём *dxdydz*, так как каждый раз отрезок представляет собой недостающее ребро. Выражения (6.13) преобразуются к виду

$$\left(-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z}, -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z}, -\frac{\partial(\rho w)}{\partial x}\bigg|_{x,y,z} \right) \cdot dxdydzdt \qquad (6.14)$$

Накопление за счет изменение плотности, происшедшее за время *dt*, можно представить в виде разности масс выделенного объёма

$$\left(\rho|_{t+dt} - \rho|_{t}\right)dxdydz = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dxdydzdt\,. \qquad (6.15)$$

Полученное выражение (6.15) приравниваем сумме трёх слагаемых в (6.14).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \qquad (6.16)$$

Это и есть уравнение сохранения массы. Его называют иногда и уравнением неразрывности сплошной среды, подразумевая, что оно теряет силу при образовании пустот или каверн в жидкости (например, при изучении кавитации).

Уравнения (6.12) и (6.16) замыкают задачу о движении идеальной жидкости, если известен закон изменения плотности от давления, т.е. если жидкость баротропная. Например, для изотермического движения газа плотность и давление пропорциональны друг другу, при адиабатическом движении они связаны показателем адиабаты, давление пропорционально плотности в степени показатель адиабаты. Для слабо-сжимаемых жидкостей принимают $\rho = \rho_0[1 + \beta(p - p_0)]$, где β есть сжимаемость жидкости. Для несжимаемых жидкостей β=0, плотность их не зависит ни от координат, ни от времени. Уравнение сохранения массы (4.16) упрощается, плотность исчезает, оно приобретает наиболее простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (6.17)$$

Векторный вид уравнений Навье-Стокса получим, если воспользуемся оператором набла, который преобразует

скалярную функцию в вектор, и оператором дивергенции, который векторную функцию переводит в скаляр. Согласно общепринятым обозначениям

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \quad div\vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right) = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.18}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения Эйлера можно собрать в одно векторное уравнение с помощью этих операторов и придать вид

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{\mathbf{v}} \tag{6.19}$$

А закон сохранения массы (6.16), очевидно, запишется через дивергенцию

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{\mathbf{v}}\right) = 0 \tag{6.20}$$

Векторная запись уравнений удобна из-за лаконичности письма. Плотность считается известной функцией давления.

Уравнения (6.19) и (6.20) описывают наиболее простой случай движения вязкой жидкости. Можно к предположению изотермии добавить и предположение несжимаемости жидкости.

Многие математические вопросы существования и единственности решений уравнений Навье-Стокса ещё не получили своего решения. Чарльз Фефферман в 1998 году в качестве проблемы тысячелетия на приз в 1 миллион долларов США предложил следующую задачу. Доказать существование решения и гладкость во всём трехмерном пространстве поля скорости и распределения давления для уравнений Навье-Стокса. Доказать не существование или не гладкость решений для скорости и давления при каких-либо начальных условиях или действующих массовых силах. Попытки решения были, но задача остаётся не решённой. Приз ждёт хозяина.

Лекция 7.

Геометрия порового и трещинного пространства.

Горные породы. Песчаные пласты. Пористость. Опытное определение. Понятие идеального грунта. Определение пористости идеального грунта при плотной и рыхлой упаковке. Моделирование капиллярных каналов. Трещинный пласт. Объем трещин и объём пор. Трещиновато-пористые пласты. Геологические и извлекаемые запасы. Оценка запасов.

Горные породы.

Многочисленными артезианскими колодцами и пробуренными на нефть и газ скважинами достаточно подробно изучено строение верхнего слоя земной коры. С древних времён человек обрабатывает почву (слой 20-40 см) и знает, из каких компонент складывается почвенный корнеобитаемый слой. Физика почвы представляет в настоящее время отдельную прикладную науку, занимающуюся благоприятными условиями роста и развития растений для обеспечения высокой урожайности почв.

Строительство городов принудило человека закладывать прочные фундаменты зданий и изучать свойства грунтов, пролегающих на глубинах 1-10 м. В строительных вузах изучают учебные дисциплины, называемые «Инженерная геология», «Основания и фундаменты». В грунтах, как правило, содержатся частицы твёрдых пород, минеральные соли разного состава, воздух и вода. Знание свойств грунта необходимо для прогноза поведения здания под нагрузкой, т.е. под действием веса, ветра и землетрясений. Ниже грунтового слоя отложения пород имеет меняющийся состав, зачастую песчаные пласты сменяются глинистыми прослойками и скальными породами. Насыщенный водой и воздухом массив до нескольких сот метров вглубь называют артезианским бассейном.

Ниже артезианского бассейна осадочная толща состоит из проницаемых и непроницаемых отложений. Проницаемые отложения, как правило, содержат флюиды. Они чередуются с непроницаемыми слоями, содержащими глинистые фракции в значительном количестве. По пластам флюиды (вода, газ, нефть и т.п.) *мигрируют* по естественным причинам, а под действием перепада давления они *фильтруются* к скважинам

и колодцам. Глинистые перемычки практически непроницаемы, в пластах флюиды могут двигаться и по разным направлениям.

К настоящему времени скважины пробурены до глубины 12 км, Кольская сверхглубокая имеет глубину 12 262 м. В отличие от других глубоких скважин, которые бурились для добычи нефти, СГ-3 была пробурена исключительно в научно-исследовательских целях в том месте, где граница Мохоровичича подходит близко к поверхности Земли. Были найдены проницаемые осадочные толщи и рыхлые породы до этих глубин. Многократно происходили аварии, обрыв буровой колонны, прихват инструмента, обнаруживались пустоты. На глубине 12 км зафиксирована температура пород 220°С.

Современная добыча нефти и газа приходится на глубины до 2-5 км. Однако нефть и газ залегают не только в осадочной толще, но и в материнских породах. На глубинах 3.5 км и ниже есть проницаемые породы не осадочного происхождения, поднявшиеся с более глубоких внутренних слоёв Земли, так называемые материнские породы, содержащие нефть, газ и воду. В отличие от осадочных толщ и пластов для них употребляют другое называние - залежь фундамента. Слагающие материнские породы граниты и гранодиоритовая толща изрезана трещинами и имеют хорошую проницаемость у кровли фундамента.

Пористость.

Она определяется как удельный объём пустот в породе или в грунте. Обозначают обычно латинской буквой m или математическим символом ϕ . Понимается под пустотами только связный объём пустот. Закрытая часть пор, не имеющая обмена содержимым с другими порами, относят к скелету породы. Чтобы измерить пористость куска горной породы правильной формы, применяют двойное взвешивание. Измеряют вес в сухом виде и вес после достаточно долгого пребывания в воде (для кубика $5 \times 5 \times 5$ см^3 почти сутки). По разнице весов узнают объём поглощённой воды. Разделив его на объём образца, определяем пористость горной породы. Для определения пористости зернистого песка или пшена, можно поступить ещё легче. Наполнить сухим песком литровую банку. Медленно вливать в банку воду из мензурки до полного её

заполнения, без образования пузырьков воздуха. Отношение объёма налитой воды к объёму 1 литр и составит значение пористости.

Ясно, что при таком определении пористости участвует лишь связная пористость и трещины, если таковые в образце имеются. Пористость зависит от структуры поровых каналов породы, от гранулометрического состава обломочного материала минерала, укладки и утрамбовки, и других им подобных причин. Для песчаных пластов и залежей осадочных толщ обломочного материала пористость сравнительно высока, можно в таких пластах ожидать промышленные запасы воды, нефти или газа. Наиболее надёжным считается определение пористости в лабораторных условиях научно-исследовательского института. Обычные значения пористости для грунтов и песчаных пластов располагаются в интервале $0.12<m<0.24$. Для почв и рыхлых насыпных грунтов - в интервале $0.3<m<0.5$.

Введение понятия *идеального грунта* позволяет предвидеть значения пористости водонасыщенного песка, несцементированного песчаника и других зернистых грунтов. Под идеальным грунтом подразумевают пористую среду, сложенную из шариков одного и того же радиуса геометрически правильным образом. Так, например шарики могут быть уложены в кубическую упаковку, друг над другом, правильными горизонтальными и вертикальными рядами. Ясно, что такая кубическая упаковка будет рыхлой, с наибольшей пористостью. Если соединить плоскими гранями центры 8 соседних шаров, то в качестве элемента симметрии получим куб, с ребром, равным диаметру шара. Объем шара составит $8R^3$, объём скелета равен одному объёму шара (по восьмой доле шара в каждом углу), значит, объём пустот составит $8R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$. Поделив на общий объём элемента симметрии, получим для пористости значение $m = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.4764$. Это высокое значение.

Как правило, грунт имеет более плотную, ромбоэдрическую упаковку. Для идеального грунта такая упаковка имеет другой элемент симметрии, им является правильный тетраэдр с ребром, равным диаметру шара $2R$. На

рис 7.1 схематически изображены упаковки, кубическая и ромбоэдрическая.

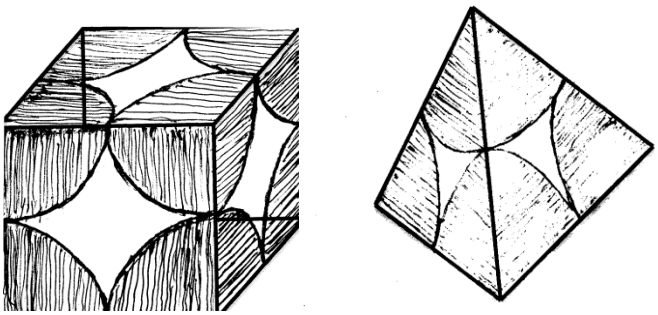


Рис 7.1. Схематическое изображение элемента симметрии кубической и ромбоэдрической укладки шариков идеального грунта.

Как видно из рис. 7.1, объём тетраэдра составит произведение площади основания на треть высоты, т.е. $R^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{(2R)^2-\left(\frac{2}{3}R\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}R^3$. Часть объёма в тетраэдре принадлежит твёрдому скелету. Из курса стереометрии нам известно, что тетраэдр можно нарастить до треугольной призмы, присоединив к нему 2 пирамиды равного с тетраэдром объёма, а затем и до четырёхугольной косой призмы, с плоскими углами граней 60° и равными $2R$ рёбрами. Теперь уже содержимый в призме объём твердого материала объёму одного шара радиуса R. Содержащийся в тетраэдре объём скелета равен шестой части объёма шара. Объём пустот в тетраэдре найдётся как разность $\frac{2\sqrt{2}}{3}R^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\pi}{9}\right)R^3$. Разделив этот объём пустот на объём тетраэдра, имеем для пористости ромбоэдрической укладки шаров значение

$$m=1-\frac{\pi}{3\sqrt{2}}=0.259. \qquad (7.1)$$

Для песчаных материалов при плотной упаковке пористость близка именно к этому значению. Как показывает формула (7.1), значение пористости идеального грунта не зависит от радиуса шаров, слагающих грунт. Пористость зависит от способа укладки. Хорошо известна формула Слихтера [9] для пористости m идеального грунта, полученная для промежуточных ромбоэдрических укладок между кубической и плотной укладками, с плоским углом скоса грани

θ. В случае кубической укладки угол θ= π/2, для плотной ромбоэдрической укладки θ=π/3.

$$m = 1 - \frac{\pi}{6\left(1-\cos\theta\right)\sqrt{1+2\cos\theta}}. \qquad (7.2)$$

Полученные выше значения согласуются с (7.2). Однако на практике идеального грунта нет, даже для песчаников наиболее часто встречающиеся значения пористости дают заметные отклонения в сторону уменьшения.

Разный гранулометрический состав обломочного материала способствует тому, что пустоты между крупными зёрнами занимают мелкие частицы. Если смесь состоит только из двух фракций, крупнозернистой (песок) и очень мелкой (цемент), то выбрав соотношение 3:1 крупной и мелкой фракций по объёму, можно надеяться, что мелкая фракция займет в результате смешения поровую часть крупных зёрен, а пористость станет 0.259·0.259=0.0173. Такая пористость весьма мала и, при схватывании песка с цементом, можно рассчитывать на надёжную прочность раствора для каменной кладки. Примерно также считают норму фракций для получения бетонной смеси (гравий, песок и цемент).

Можно получать и высокие значения пористости. При распашке влажной почвы образуются комочки размером с орех и более, комки которой имеют свою пористость, порядка 0.26. Распашка дает дополнительную пористость между комочками того же порядка. Суммарная пористость может быть найдена как их сумма 0.26+0.84·0.26=0.477. Часто выделяют и среды с двойной пористостью, когда нужно учесть наличие сети крупных пор, определяющих высокую проводимость флюидов, и мелких пор малого размера, вмещающих значительные запасы. Моделирование двойными фильтрационно емкостными свойствами в ряде случаев может привести к более точным результатам.

Внутренняя поверхность пористой среды.

Фильтрация жидкости по поровому пространству происходит с задержкой частиц жидкости на внутренней поверхности пор. Общепризнано, что частицы вязкой жидкости прилипают к твёрдой поверхности, по которой происходит течение. Все частицы, находящиеся в контакте с поверхностью имеют нулевую скорость, т.е. не движутся. Понятно, что

сопротивление движению тем больше, чем большую поверхность приходится омывать жидкости. Удельная внутренняя поверхность пор является существенной характеристикой пористой среды, определяющей пропускную способность через пористую среду.

Получим формулу для удельной внутренней поверхности идеального грунта. Для ромбоэдрической укладки шаров внутри элемента симметрии в виде тетраэдра, как выше было показано, умещается шестая часть шара, что составит площадь поверхности $4\pi R^2/6$. Объём тетраэдра составил $2\sqrt{2}\,R^3/3$. Следовательно, на 1 объёма приходится поверхность, равная их отношению, т.е. $\Sigma = \pi/R\sqrt{2}$.

Для песка диаметром 2 мм удельная внутренняя поверхность составит 3.14/1.41·1000=2227 м². Для очень мелкого песка диаметром 100 мкм внутренняя поверхность станет в 20 раз больше и достигнет 4.5 га/м³. Гектары на кубометр есть характерное значение площади удельной внутренней поверхности пор. Чем больше площадь удельной поверхности пор, тем труднее фильтрация через пористую среду.

Если песчинки имеют сплюснутую форму эллипсоида вращения, а не шара, то внутренняя поверхность может быть больше. При сплющивании по вертикали ромбоэдрической укладки в 10 раз поверхность песчинки может стать только в 2 раза меньше, а объем станет меньше во столько же, т.е. 10 раз. Это означает, что удельная внутренняя поверхность станет в 5 раз больше, а возможность флюидов фильтроваться станет в 5 раз хуже. Строение скелета породы из пластинчатого материала ведёт к ухудшению фильтрационных свойств пористой среды.

Капиллярно-поровая модель.

Можно представить себе модель грунта, внутренняя поверхность которого состоит из капиллярных каналов. В реальной среде капилляры имеют разного размера сечения, некруглые и направленные случайным образом. Капилляры имеют множество пересечений и образуют единую разветвлённую сеть. По крупным каналам флюиды движутся с опережающими темпами. Есть попытки моделировать пористую среду как сеть взаимосвязанных капилляров. Такие же попытки делаются в биофизике для описания кровеносных

систем. В идеале, в простейшем случае, можно принять все каналы прямолинейными, одинакового сечения, круглыми или треугольными.

Пусть в 1 м³ имеются по n каналов, направленных вдоль каждого из осей, объём их составит пористость грунта $m = 3n \cdot \pi R^2$, удельная поверхность пор будет равна $\Sigma = 3n \cdot 2\pi R = 2m/R$. Для модели зернистой поровой среды выше было получено $\Sigma = \pi/R\sqrt{2}$. Как видим, для капиллярно поровой модели удельная поверхность пор оказалась значительно ниже, чем для идеального грунта.

Более близкий к реальному значению результат для удельной поверхности получим, если вместо круглых поровых каналов взять каналы в виде равностороннего криволинейного треугольника, образованного внутри прямолинейного равностороннего треугольника радиуса $2R$ отрезанием секторов окружности радиуса R от каждой вершины. Тогда объём поровых каналов в 1 м³ составит $m = 3n \cdot \left(\sqrt{3} - \pi/2\right)R^2$, а удельная поверхность пор будет равна

$$\Sigma = 3n \cdot \pi R = \frac{2m}{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1} \cdot \frac{1}{R} = \frac{2m}{0.103R} = \frac{19.4m}{R} \cdot \qquad (7.3)$$

Полученное выражение дает значения, уже сопоставимые с внутренней удельной поверхностью пор зернистой среды.

Модели пластов с трещинами.

Ряд залежей нефти известняковых отложений и в других твёрдых материнских породах имеют пустоты не только в виде пор, но и трещин. Найдём пористость идеализированной трещинной залежи.

В кубике с ребром 1 метр пусть имеются три одинаковые системы трещин, параллельные граням. Обозначим Г- густоту трещин, т.е. среднее число трещин на длину 1 м, δ - среднее значение раскрытости трещин. Тогда в объёме единичного куба будут 3Г трещин, каждая объемом δ мкм·м², т.е. пористость трещинного грунта составит $m = 3\Gamma\delta$. Для залежи фундамента месторождения Белый Тигр принималось Г=15÷20, δ=50÷60 мкм. Для неё получаем $m = 3 \cdot 20 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0.003$, что составляет 0.3%.

Многочисленными промысловыми исследованиями подтверждено, что емкостные свойства трещинных залежей малы, в лучшем случае 1÷2%. Другое дело, если залежь является трещиновато-пористой, когда порода представляет собой пористую среду, раздробленную системами трещин. Емкостные свойства определяются поровым пространством блоков, тогда как трещины служат магистральными путями движения флюидов.

Согласно представлениям о коллекторе фундамента, сложившимся у петрографов и физиков НИПИморнефтегаз СП «Вьетсовпетро» в результате изучения кернового материала, пустотное пространство складывается из макротрещин и каверн, отходящих от них сети микротрещин и низко проницаемой пористой матрицы с трудно извлекаемыми запасами нефти. Согласно лабораторным данным в среднем по залежи фундамента доля макротрещин и каверн составляет около 50% пустотного пространства, микротрещины занимают около 40% пустот, на долю матриц приходится лишь примерно 10% пустот. Спектр распределения пустот по упомянутым типам меняется по объему залежи. Вытеснение нефти происходит в основном по макротрещинам, в микротрещины и матрицу вода пропитывается из-за действия капиллярных сил, вытесняя из микротрещин и микропор нефть в макротрещины и каверны. По данным экспериментов на смоделированных кернах можно принять следующие коэффициенты вытеснения: 0.75 - для макротрещин и каверн; 0.40 - для микротрещин; 0.20 - для низко поровой матрицы. В среднем для залежи фундамента коэффициент вытеснения принимают равным $0.75 \cdot 50 + 0.4 \cdot 40 + 0.20 \cdot 10 = 56\%$. Но в разных точках залежи распределение по типам пустот различно и приведенная цифра подвержена значительным вариациям. Закачиваемая вода сначала прорывается в макротрещины и пропитывается в микротрещины, заполняя постепенно объем микротрещин и микропор до максимально возможного значения.

Геологические и извлекаемые запасы.

После того, как пробурено ряд скважин и извлечены образцы пород, можно судить о свойствах залежи. Первым делом узнают, есть ли аналог его, уже разработанный, чтобы использовать опыт. Геологи определяют геометрию залежи,

петрографы – минеральный состав и строение, физики – пористость, проницаемость и другие физические свойства, химики – свойства флюидов. Для начала разработки требуется оценка запасов, сколько может содержаться нефти в пласте, и какую их долю можно извлечь. При оценке запасов нужно ориентировочно подсчитать ту долю объёма залежи, где залегает нефть. Пористость может быть различной в разных частях залежи, нужно разбить залежь на разумные блоки, в пределах которых свойства залежи, пласта и жидкости считать примерно сохраняющимися. Для такого блока геологические запасы в тоннах пластовой нефти определятся как произведение $m(1-s_0)\rho V$, где ρ – плотность пластовой нефти, s_0 – так называемая погребённая насыщенность водой, V – геометрический объём выделенного одного блока. Подсчитывают те же запасы и по-другому: пространственной сеткой покрывают залежь, по значениям в отдельных точках, где был отобран керн, интерполированием и экстраполяцией определяют пористость, погребённую воду и плотность пластовой нефти в каждой ячейке, далее суммируют по всем ячейкам и находят запасы в целом. Неизбежны погрешности вычислений, потому отраслевые институты многократно повторяют подсчёт геологических запасов, уточняя их в процессе эксплуатации залежи.

Геологические запасы подлежат утверждению в ГКЗ, причём должно быть подсчитано, сколько в тоннах товарной нефти и в кубометрах попутного газа будет получено из залежи. Извлечь все запасы невозможно, в лабораторных условиях вытеснения по трубе можно получить 50-70% извлечения (62% было для залежи фундамента Белого Тигра). В пластовых же условиях, когда закачиваемая вода может уходить и в стороны, охватить вытеснением залежь на все 100% как в трубе невозможно. Вводят понятие коэффициента извлечения нефти, который помимо коэффициента вытеснения учитывает ещё и коэффициент охвата. Согласно американскому опыту, коэффициент извлечения составляет в среднем 33%, опыт разработки месторождений в СССР, как указывает Байбаков Н.К., КИН=44%. Есть эмпирические формулы, которые позволяют оценить КИН в зависимости от основных характеристик залежи. Если запасы пластовой нефти составляет 540 млн. тонн (залежь фундамента Белого Тигра), из

них пятая часть по весу есть попутный газ, то 44% от 540·0.8 составит 190 млн. тонн. Это и будут извлекаемые запасы.

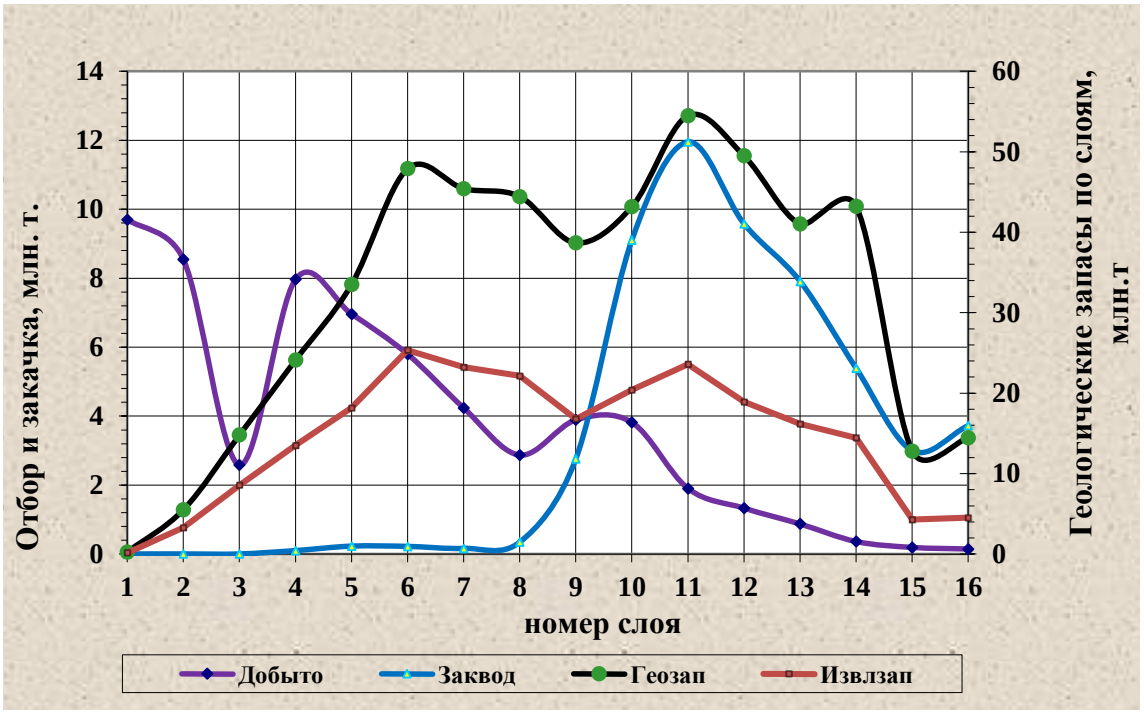


Рис.7.2. Подсчитанные по 100 метровым слоям геологические и извлекаемые запасы залежи фундамента Белого Тигра. Добыча нефти и закачка воды на дату 01.07.1999 г.

Существуют и методы уточнения запасов. Их применяют уже в процессе разработки месторождения, когда добыта заметная часть запасов и замечено падение пластового давления. Накопленные в процессе разработки залежи данные по отбору нефти и снижению пластового давления дают возможность связать подвижную (и деформируемую) часть запасов нефти с историей разработки залежи, в случае хорошей гидродинамической связи по всей залежи. Его применение возможно лишь после того, как будет добыта некоторая часть запасов и пластовое давление снизится на ощутимую величину. Это метод материального баланса. Снижение пластового давления в процессе разработки из-за добычи нефти и его поддержание закачкой воды моделируется согласно зависимости плотности флюидов и сжимаемости пород от пластового давления.

Лекция 8

Моделирование фильтрации жидкости.

Проницаемые и непроницаемые среды. Скорость фильтрации. Коэффициент фильтрации. Расход воды через фильтр. Опыты с другими жидкостями. Давление в жидкости. Закон Дарси. Коэффициент проницаемости. Применения для однородных жидкостей, газов. Векторная запись закона для трёхмерной фильтрации. Связь проницаемости с радиусами капилляров и пористостью. Пределы применимости закона Дарси. Нелинейная фильтрация. Условие сохранения массы фильтрующейся жидкости. Дифференциальное уравнение для пластового давления.

Фильтрация.

Осадочные породы и природные пласты различают проницаемые и непроницаемые. Насыпной песок проницаем, сквозь песок может просачиваться вода под действием собственной тяжести или напора, когда её закачивают. Мощный метровый пласт глины является практически непроницаемой средой. Глинистые пласты обычно подстилает и накрывает проницаемый песчаный пласт, на глубинах проницаемые пласты обычно чередуются с непроницаемыми глинистыми пластами. Движение жидкостей в природных проницаемых средах под действием естественных причин называют *миграцией*. Нефть и газ могут мигрировать по естественным поровым каналам вверх и собираться у куполов и в тупиковых зонах, образуя залежи. В отличие от миграции, под *фильтрацией* понимают искусственно созданное течение жидкости или газа по поровым каналам. Например, при вскрытии скважины на забое давление снижено, в нефтяном пласте высокое давление, образуется перепад давления и под действием этого перепада происходит фильтрация к забою скважины. В лабораторных условиях перепад давления создаётся компрессором или поддержанием разных уровней жидкости на входе и выходе из трубы.

Интерес к установлению законов фильтрации через поровую среду был обусловлен вначале необходимостью очищения воды фильтрами для нужд городского хозяйства. В

1856 году Дарси поставил первые опыты для исследования зависимости расхода воды через фильтр в зависимости от гидродинамического напора. На входе в фильтр поддерживался напор высотой столба воды H_1, а на выходе фильтра – напор столба воды H_2. Фильтр же представлял собой набитую песком трубу фиксированной длины l с мелкой сеткой на торцах. Замена фракций песка позволяла исследовать различные как бы грунты, тогда как установление различных значений напора позволяла регулировать расход. Было установлено, что расход пропорционален градиенту напора $(H_1 - H_2)/l$, а при увеличении площади поперечного сечения расход растёт пропорционально площади сечения. Коэффициент пропорциональности зависел от выбранной фракции песка. Это позволило Дарси сформулировать свой закон в виде равенства $Q = cS\frac{H_1 - H_2}{l}$. Коэффициент c, превративший пропорцию в равенство, был назван коэффициентом фильтрации.

Скорость фильтрации u определяется как отношение расхода Q к площади поперечного сечения S. Это не истинная скорость жидкой частицы, несущейся по поровому каналу. Поровые каналы разных размеров и направлений, определить истинную скорость частицы невозможно и не нужно. Понятие скорости фильтрации позволяет находить расход. Если даже фильтрация трехмерная, по любому выбранному направлению. Имеет смысл в законе Дарси сразу ввести скорость фильтрации, отношение перепада напора к длине трубы заменить производной напора по координате, и принять закон Дарси в дифференциальном виде

$$u = -c\frac{dH}{dx} \qquad (8.1)$$

Коэффициент фильтрации удобен тем, что имеет размерность скорости. Но им можно пользоваться только для воды. Для других жидкостей он меняет значение, хотя среда осталась той же, труба забита той же фракцией песка.

Формулировка закона Дарси для вязких жидкостей.

Согласно (8.1) происходит фильтрация и любых других жидкостей (спирт, керосин, нефть и т.п.). Многочисленные опыты подтвердили, что более вязкие жидкости фильтруются

хуже, менее вязкие – лучше. Коэффициент фильтрации служит общей характеристикой, вплетающий в себя как свойство поровой среды, так и свойства жидкости. С развитием нефтедобычи значительно возрос интерес к проблемам фильтрации. Коэффициент фильтрации определяется парой среда-жидкость. Число замеров равно произведению числа сред на число жидкостей. Экспериментальные работы показали, что необходимо писать закон Дарси в несколько ином виде, когда вместо напора участвует давление в жидкости, а вязкость выделена отдельным множителем. Преобразуем формулу (8.1) следующим образом: умножим правую часть на дробь с числителем и знаменателем, равным $\mu\rho g$, где g есть ускорение свободного падения. Закон Дарси преобразуется к виду

$$u = -c\frac{\mu\rho g}{\mu\rho g}\cdot\frac{dH}{dx} = -\frac{c\mu}{\rho g}\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\left(\rho g H\right)}{dx} = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dx}, \quad k = \frac{\mu c}{\rho g}. \qquad (8.2)$$

Введённая новая величина k оказалась зависящей только от выбора пористой среды, а хорошо известное свойство вязкости выделилось множителем. Такая запись закона Дарси оказалась более перспективной в нефтяной индустрии. Величину k называют коэффициентом проницаемости, чаще просто *проницаемостью* среды. Размерность проницаемости совпадает с размерность площади и составляет м². Реальные среды имеют значения проницаемости, измеряемые долями мкм². Чтобы прощупать возможные значения проницаемости, рассмотрим капиллярно-поровую модель проницаемой среды.

Моделирование проницаемости.

Представим себе проницаемую среду, состоящую из n параллельных капилляров одного и того же радиуса R. Направим ось Ox вдоль капилляров, выделим поперек капилляров сечение площади S, цилиндр вдоль Ox длины l, найдём расход жидкости, используя формулу Пуазейля по давлениям на торцах p_1 и p_2 выделенного цилиндрического объёма. Получим

$$Q = n\frac{\pi R^4}{8\mu}\cdot\frac{p_1 - p_2}{l}. \qquad (8.3)$$

Чтобы получить скорость фильтрации, надо поделить Q на площадь поперечного сечения S. Площадь дырок от

капилляров в этом сечении составит $n \cdot \pi R^2$, а её отношение к площади S определяет пористость, создаваемую лишь семейством капилляров, параллельных оси Ox. Такие же капилляры могут располагаться и вдоль других осей, поэтому за пористость такой модели можно принять

$$m = \frac{3n \cdot \pi R^2}{S}. \qquad (8.4)$$

Используя эту пористость, из (8.3) получаем для скорости фильтрации

$$u = \frac{Q}{S} = \frac{mR^2}{24\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad k = \frac{mR^2}{24} \qquad (8.5)$$

Последняя формула позволяет оценивать проницаемость ориентировочно, если размеры поровых каналов известны. Обычные размеры поровых каналов, измеренные на шлифах проницаемых пород, имеют значения десятки микрон в диаметре. Если плотно приложить друг к другу три круга радиуса R, то в образовавшийся внутри криволинейный треугольник можно вписать окружность радиуса $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) R = 0.155R$. Если радиус песчинок 0.1 мм, то радиус поровых каналов будет порядка 15 мкм. Реальные замеры радиусов поровых каналов тоже укладываются в интервал 5-25 мкм в большинстве случаев. Для радиуса поровых каналов 15 мкм (диаметр 30 микрон) при пористости m=0.24 формула (8.5) даёт оценку проницаемости 2.25 мкм². Для реальных пластов замеры на кернах дают низкие значения проницаемости, от 0.01 до 0.2 мкм², на 1 или 2 порядка меньше. Определённые по кернам значения оказываются всегда ниже значений проницаемости, найденных непосредственно промысловыми испытаниями. Дело в том, что поровые каналы совсем не круглые, и это отмечалось в лекции 4. Они весьма разных форм, более подходит форма сечения порового канала в виде вогнутого криволинейного треугольника, для неё внутренняя поверхность примерно на порядок превышает внутреннюю поверхность модели с круглыми порами. А действие вязкости распространяется на площадь внутренней поверхности пор. Из-за извилистости длины поровых каналов значительно больше расстояния между сечениями, где замеряются пластовые давления. Поровые каналы имеют переменное сечение и взаимные пересечения, что обуславливает дополнительные

потери импульса жидких частиц. Формула для проницаемости (8.5) служит для ориентировки, чтобы многократно не ошибиться, да и она примерно на порядок завышает значения проницаемости. Поэтому проницаемость определяют в лабораторных условиях по малым образцам, определяют в промысловых условиях по индикаторным линиям и кривым восстановления давления, уточняют на машинных моделях, согласовывая историю разработки участка залежи с машинным расчетом.

Для пространственной фильтрации по трём независимым направлениям вводят компоненты скорости фильтрации по трём осям и соответствующие градиенты давления по этим осям. Закон Дарси принимают в виде [10-11]

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{8.6}$$

Считается, что для несжимаемой и сжимаемой жидкости, для установившегося во времени и неустановившегося течения, для пористых и трещиноватых сред, градиент давления связан со скоростью фильтрации указанными соотношениями – законом Дарси. Его можно представить и в векторной форме

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\vec{\nabla} p \tag{8.7}$$

Кривая фильтрационного течения.

Её определяют как зависимость модуля скорости фильтрации от поддерживаемого модуля градиента давления. Уравнение кривой течения представляют в виде

$$\upsilon = \frac{k}{\mu} G, \quad G = \left|\vec{\nabla} p\right|, \quad \upsilon = \left|\vec{v}\right| \tag{8.8}$$

Экспериментальные проверки линейной зависимости скорости фильтрации от градиента давления производились для разных поровых и трещиноватых сред и разнообразных жидкостей. Обнаружилось, что нарушения линейности закона фильтрации имеет место, как для больших скоростей фильтрации, так и в области малых градиентов давления.

При больших градиентах давления кривая течения отклоняется к оси градиентов, модуль скорости имеет меньшие значения, чем в линейном законе Дарси. По аналогии с течением в трубах стали приписывать фильтрационному

течению турбулентность и вводить фильтрационный аналог числа Рейнольдса. Так, согласно Миллионщикову М.Д., за усреднённый диаметр пор можно принять $\sqrt{k/m}$, а фильтрационный аналог числа Рейнольдса составит

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \upsilon}{\mu m}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (8.9)$$

Появление снова в знаменателе пористости объясняется переходом к истинной скорости течения в порах от скорости фильтрации в объёме υ.

Обработка экспериментального материала показала, что нарушение закона Дарси и переход к нелинейному закону течения наблюдается в области значений чисел Рейнольдса (8.9) от 0.022 до 0.29. В области $\mathrm{Re} > 0.29$ течение имеет заведомо нелинейный характер, закон Дарси следует подправить. В области $\mathrm{Re} < 0.022$ имеет место линейный закон, по крайней мере, для чистых жидкостей и газов. В промежуточной области отклонения от линейного закона могут оказаться и несущественными. Это зависит от значений параметров, не вошедших в закон Дарси, здесь требуется некоторое дополнительное изучение вопроса.

К примеру, если пласт имеет пористость 0.16, скважина с интервалом притока 5 м и внешним радиусом 0.1 м даёт высокий дебит 200 м³/сутки, пласт имеет достаточно хорошую проницаемость в $2 \cdot 10^{-13}$ м², плотность добываемой пластовой нефти на забое 700 кг/м³, её вязкость 0.5 мПа·с, то наибольшее значение числа Рейнольдса составит по (8.9) значение 0.072. Оно попадает в неопределённую область, но на небольших расстояниях, порядка 3-х радиусов скважин. Можно в таких случаях ограничиться линейным законом. Но если бы была пористость в 10 раз меньше, то максимальное число Рейнольдса было бы в 30 раз больше, но ещё остались бы в зоне неопределённости.

В технической учебной литературе утвердилось понимание области нелинейности как переход к турбулентности. Такая трактовка автору не представляется целесообразной. Ламинарное течение в трубе является слоистым, соседние частицы всегда остаются соседними. Турбулентность связана с интенсивным перемешиванием, соседние частицы обмениваются не только импульсом, но и

частью массы. При фильтрации «частица жидкости» – понятие условное, это скорее псевдо-частица, она и при малых скоростях обменивается с соседними частицами, как импульсом, так и массой. В сложной структуре поровых каналов, с порами, кавернами и трещинами, всегда есть место взаимному обмену, движение жидкости и при малых скоростях турбулизуется хаотичной структурой порового пространства, здесь нет места слоистому ламинарному движению. Правильнее говорить о линейности или нелинейности кривой фильтрационного течения, чем о ламинарной или турбулентной фильтрации. При малых скоростях кривая фильтрационного течения имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат. При больших скоростях кривая фильтрационного течения отклоняется от прямой линии, она может быть описана, например, параболой.

Описать параболой нелинейную кривую фильтрационного течения удобнее в виде, разрешённом относительно модуля градиента давления, т.е. в виде

$$G = a\upsilon + b\upsilon^2 = \frac{\mu}{k}\upsilon + \beta\frac{\rho}{\sqrt{k}}\upsilon^2,\ a = \frac{\mu}{k},\ b = \beta\frac{\rho}{\sqrt{k}},\ \frac{b}{a} = \beta\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu}. \qquad (8.10)$$

Безразмерный параметр β характеризует лобовое сопротивление потоку жидкости структурой покоящейся пористой средой, для случая пачки параллельных капилляров наличие $\beta \neq 0$ будет означать переход к нелинейному режиму. Если имеются экспериментальные данные, полученные при фильтрации жидкости через образец пористой среды при различных расходах, то аппроксимация параболой, проходящей через начало координат, может быть легко получена на EXCEL, и определены коэффициенты a и b. Как правило, вязкость жидкости заранее известна, её то же определяют лабораторным экспериментом. Коэффициент a даст значение проницаемости как μ/a, коэффициент b покажет влияние нелинейности. Проявления нелинейности начнётся, когда отношение второго слагаемого к первому будет превышать допустимую погрешность ε, т.е. при условии $\upsilon > \upsilon_\varepsilon = \varepsilon a/b$. Зоны, где скорости фильтрации превышают значения υ_ε, являются зонами нелинейной фильтрации. На

практике нелинейность приходится учитывать, прежде всего, в призабойной зоне пласта.

Появление квадратичного члена в (8.10) обусловлено возрастающей ролью инерционных членов при увеличении скорости. Укажем на простую аналогию. Для шара малого радиуса R, движущегося со скоростью υ в жидкости с вязкостью μ, сила сопротивления движению определяется формулой Стокса $F = 6\pi\mu R\upsilon$ при малых скоростях. С увеличением скорости переходят на первое приближение Озеена $F = 6\pi\mu\upsilon + (9/4)\pi\rho R^2\upsilon^2$. Квадратичный член можно заменить введением числа Рейнольдса после вынесения за скобку силы вязкости Стокса [8]

$$F = 6\pi\mu R\upsilon\left(1+\frac{3}{16}\mathrm{Re}\right), \quad \mathrm{Re}=\frac{\rho\upsilon d}{\mu}, \quad d = 2R. \tag{8.11}$$

Выражение показывает, что нелинейность вносит лишь 5%-й вклад при малом числе Re=0.27. Вклад нелинейности становится равным линейному члену при числе Re=5.4 и десятикратно превосходящем при Re=54.

Аналогична ситуация и в теории фильтрации. Е.М. Минский подобрал формулу типа (8.10) для зернистого грунта без глинистых и алевролитовых включений с мало варьируемой постоянной $C=(0.1–0.12)\cdot10^{-3}$ в виде

$$G=\frac{\mu}{k}\upsilon+\frac{C\rho d^2}{mk\sqrt{k}}\upsilon^2=\frac{\mu}{k}\upsilon\left(1+\frac{C\,d}{m\sqrt{k}}\cdot\frac{\rho\upsilon d}{\mu}\right). \tag{8.12}$$

Второе слагаемое в скобке – своего рода число Рейнольдса, d – эффективный диаметр частиц зернистого грунта, 10^{-3}м, k – проницаемость, измеренный в 10^{-6} м². Для речного песка при d=2 мм, проницаемости $k = 4\cdot10^{-12}$ м² и при значении пористости m=0.3 в формуле Минского при числе $\mathrm{Re}=\rho\upsilon d/\mu$ получится коэффициент, равный от 1/3 до 2/5. Это согласуется с аналогом, формулой Озеена (8.11).

Уравнение для распределения пластового давления.

Соотношения (8.6) не дают достаточных уравнений, чтобы определить 4 неизвестные функции: u, v, w и p. Нужно ещё одно уравнение. Его получим из условия сохранения массы жидкости в любом выделенном объёме среды.

Если рассматривается установившееся движение по заполненной песком прямолинейной трубе, то это условие

запишется как равенство потока массы в любом её поперечном сечении, т.е. как $\rho u = const$. Для установившегося притока к скважине, если пласт однородный толщины h и движение осесимметричное, условие сохранения массы можно писать в виде $2\pi r h \cdot \rho u = const$.

В общем же случае установившегося трёхмерного движения условие сохранения массы жидкости в параллелепипеде $dx \times dy \times dz$ приходится применять в дифференциальной форме. Для такой частицы входящий и выходящий потоки вдоль оси Ox составят $\rho u \cdot dydz$, вычисленные соответственно в точках $\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)$ и $\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)$. Разность их даст баланс массы вдоль оси Ox, равный $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdydz$. Такие же члены получим и по другим осям. Для установившегося движения общий баланс массы по трём осям равен нулю, т.е. будем иметь

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \qquad (8.13)$$

В случае фильтрации несжимаемой жидкости уравнение упрощается, плотность как постоянную величину можно вынести и убрать, система уравнений (8.6) и (8.13) образуют замкнутую модель. В случае сжимаемой жидкости или газа приходится добавлять ещё одно соотношение, связывающее плотность с давлением. Для медленных установившихся фильтрационных движений обычно принимают предположение изотермичности течения: плотность газа пропорциональна пластовому давлению, или плотность жидкости линейным образом растёт с ростом пластового давления.

Из уравнения (8.13), подставив выражения (8.6) для компонентов скорости фильтрации, получим дифференциальное уравнение для пластового давления

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0. \qquad (8.14)$$

Если имеем дело с фильтрацией артезианской воды, то воду можно считать несжимаемой и принять плотность не зависящей от давления, температуры и концентрации солей ввиду их малой минерализации. Для термальной воды часто приходится учитывать зависимость плотности от температуры

и содержания растворённых газов, при фильтрации пластовой нефти стараются ввести зависимость плотности от пластового давления, содержания растворённых газов, температуры. Для довольно широкого класса проблем можно полагать плотность жидкости и её вязкость постоянными и убрать их в уравнении (8.14). Если ещё пласт однороден, то можно и проницаемость тоже из уравнения можно убрать. И для таких условий пластовое давление будет определяться уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0. \qquad (8.15)$$

Знание поля распределения давления дает возможность определить поле скоростей и общую фильтрационную картину течения.

Нередко приходится иметь дело с горизонтально расположенными пластами постоянной небольшой толщины, с непроницаемой кровлей и непроницаемой подошвой. Например, на крупнейшем Ромашкинском месторождении нефти толщина пластов составляет 2-3 м, и они достаточно хорошо выдержаны по их толще. Естественно в таких случаях ограничиться для определения давления двумерным описанием, учитывая статическую составляющую давления поперек пласта. Вводя среднее значение давления поперек пласта, интегрируем уравнение (8.14) от подошвы до кровли, предполагая проницаемость не зависящей от вертикальной координаты *z*. Третье слагаемое обратится в нуль из-за непроницаемости кровли и подошвы, а в первых двух слагаемых давление сменится на усреднённое по толще значение. В итоге будем иметь двумерное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}\right)=0,\quad \overline{p}(x,y)=\frac{1}{h}\int_0^h p(x,y,z)dz. \qquad (8.16)$$

Отметим, что такая процедура снижения размерности задачи не проходит, если проницаемость поперек пласта меняется. Приходится придумывать усреднение проницаемости поперёк пласта и усреднение с весом для давления, что резко снижает ценность результатов. А пласты платформенного типа порой имеют по высоте пласта значительные изменения. Из всего пласта может работать иногда только 1-2 хорошо проницаемые прослои, остальная часть быть плохо проницаемой. Геологи вводят помимо толщины пласта ещё и

эффективную толщину, что помогает подправлять расчётные результаты. В случае необходимости приходится соглашаться и на трёхмерное моделирование.

Лекция 9

Установившаяся фильтрация к единичной скважине.

Предположения об однородности и осевой симметрии притока к скважине. Пластовое давление на забое и на контуре питания. Закон Дарси для случая осевой симметрии. Условие сохранения массы потока. Распределение давления вокруг добывающей скважины. Воронка давления. Формула Дюпюи. Плоский источник (сток). Логарифмический закон распределения пластового давления. Принцип суперпозиции фильтрационных течений. Дуплет. Понятие о само циркуляционной системе добычи термальной воды.

Однородный пласт.

Если на всём своём протяжении пласт имеет одинаковую толщину, одинаковую проницаемость и пористость, то такой пласт называют однородным. Если ещё скважины вскрыты по всей толщине одинаково, то возможна и одинаковая по слоям картина фильтрация жидкости. Вертикальная скорость фильтрации отсутствует, можно ограничиться рассмотрением двумерной фильтрации для слоя единичной толщины. Установившееся распределение давления в таком пласте подчиняется, как было показано в предыдущей лекции, уравнению Лапласа, которое в нашем случае в декартовых (x,y) и полярных (r,φ) координатах соответственно имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0;\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (9.1)$$

Рассмотрим бесконечный по протяжённости пласт с одной добывающей скважиной, расположенной в начале координат. Будем считать заданным дебит скважины Q и давление на забое p_c. Фильтрационное течение, очевидно, будет осесимметричным и не зависящим от угла φ. Для определения распределения давления по пласту, которое является для установившейся фильтрации функцией одной переменной r, лучше всего воспользоваться уравнением (9.1) в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)=0,\quad p(R_c)=p_c,\quad r>R_c \qquad (9.2)$$

Получилось уравнение второго порядка пока что с одним граничным условием, равенством пластового давления

давлению на забое скважины. Второе условие обычно получают по заданному дебиту скважины. Получим для начала класс решений для задачи (9.2) для бесконечного однородного пласта. Интегрируя (9.2) два раза подряд, и определяя одну из произвольных постоянных, имеем

$$r\frac{dp}{dr} = C, \quad p = p_c + C\ln\frac{r}{R_c}, \quad R_c \le r < \infty. \tag{9.3}$$

Можно сделать вывод о том, что профиль давления является логарифмической функцией расстояния от оси скважины. С удалением от оси скважины, при $r \to \infty$, решение (9.3) уходит в плюс или минус бесконечность, в зависимости от знака постоянной *C*. С инженерной точки зрения это недостаток полученного решения, лучше было бы вместо бесконечности иметь какую-либо константу. Вдали логарифмическая функция растёт очень медленно, и это обстоятельство помогает обходиться полученным решением.

Давление на контуре питания.

В протяжённых пластах на значительном расстоянии от скважины зачастую пластовое давление постоянно или очень медленно меняется во времени. Зачастую можно примерно указать окружность радиуса R_k, на которой пластовое давление принимает постоянное значение. Внутри области $R_c < r < R_k$ фильтрационное течение осесимметрично и решение (9.3) приемлемо.

Найдём постоянную интегрирования *C*, приняв условие $p(R_k) = p_{k.}$ Формула (9.3) преобразуется к виду

$$p(r) = p_c + (p_k - p_c)\frac{\ln(r/R_c)}{\ln(R_k/R_c)}. \tag{9.4}$$

Для добывающих скважин $p_k > p_c$ и функция $p(r)$ возрастающая. Но $R_k \gg R_c$, и основная часть роста функции приходится на небольшую зону возрастания радиальной координаты. К примеру, радиус контура питания имеет порядок нескольких сот метров, а радиус скважины – это менее 10 см или 0.1 м. Отношение R_k/R_c достигает 5000 и более. В формуле (9.4) дробь принимает значения от 0 до 1. Половину своего роста это дробь приобретает при $r = \sqrt{R_k R_c}$, что при $R_k = 1000$ м составит $r = \sqrt{1000 \cdot 0.1} = 10$ метров. Поэтому говорят, что вблизи добывающей скважины образуется воронка

давления. Основная часть изменения давления приходится на эту воронку.

Дебит скважины.

В практике разработки чаще известны давление на забое скважины и её дебит. Выразим в формуле (9.3) константу интегрирования C не через давление на контуре пласта, а через дебит скважины Q. Пусть толщина пласта составляет h, проницаемость равна k, вязкость добываемой нефти или воды равна μ. Из формулы (9.3), согласно закону Дарси, находим значение скорости фильтрации при входе в скважину

$$v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k}{\mu}\frac{C}{r} = -\frac{k}{\mu}\frac{C}{R_c} \qquad (9.5)$$

Чтобы получить дебит Q, умножим на площадь поверхности скважины

$$Q = 2\pi R_c h \cdot v = -\frac{2\pi khC}{\mu}. \qquad (9.6)$$

Отсюда следует, что константа интегрирования выражается через дебит

$$C = -\frac{\mu Q}{2\pi kh}. \qquad (9.7)$$

Это значит, что формулу (9.3) можно представить и в виде

$$p(r) = p_c - \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{r}{R_c}, \quad R_c \le r < \infty. \qquad (9.8)$$

Появление знака минус объясняется тем, что при добыче жидкость притекает в скважину, направление скорости противоположно направлению радиальной координаты. В формуле (9.8) значение Q отрицательно при добыче жидкости из пласта и положительно при нагнетании жидкости в скважину.

Формула (9.8) удобна на практике. Дело в том, что забойное давления и дебиты скважин обычно известны, они определяются гидродинамическими исследованиями и устанавливаются технологическим режимом разработки пласта. Знание этих двух величин позволяет оценивать воронки давлений вокруг добывающих скважин, судить о значениях давления в окрестности скважины.

Сравнение формул (9.8) и (9.4) позволяет связать дебит скважины с перепадом давления от контура питания до забоя скважины [11]. Имеем

$$Q = -\frac{2\pi kh\left(p_k - p_c\right)}{\mu \ln\left(R_k / R_c\right)}. \qquad (9.9)$$

Эта и есть хорошо известная нефтяникам – инженерам формула Дюпюи. Она дает возможность оценить ожидаемый с пласта дебит, если известны перепад давления и характеристики пласта. Пусть например, перепад давления составляет 1 МПа, радиус контура 500 м, радиус скважины 0.1 м, проницаемость 0.1 мкм², вязкость 1 мПа·с, толщина пласта 10 м. Поскольку все величины в системе СИ, то и результат будет получен в системе СИ, т.е. в кубометрах в секунду. Подстановка даёт значение Q=7.377·10^{-4} м^3/с, или 0.7377 литра в секунду. Дебиты скважин обычно приводят в сутках. В нашем случае будет получено 63.7 кубометра в сутки. Таковы в среднем значения дебитов нефтяных скважин. Но для термальных вод, где вязкость в 4-5 раз меньше, а толщина пласта в 2-3 раза больше, дебиты достигают и до одной тысячи и более кубометров в сутки.

Принцип суперпозиции.

Хорошо известно, что для линейных однородных уравнений сумма двух решений есть снова решение, если граничные условия сохраняются. Можно также решение умножить на число, уравнение будет удовлетворяться. В гидродинамике и теории фильтрации это свойство называют принципом суперпозиции течений. Два фильтрационных течения можно накладывать друг на друга, если тому не мешают граничные условия.

Пластовое давление подчиняется уравнению Лапласа (9.1), если пласт однородный. Область течения бесконечна, граничные условия на бесконечности не заданы. Естественно принять сумму решений снова решением в области вне скважин и изучить полученное решение. Например, решение (9.8) может быть обобщено в случае многих скважин. Можно попытаться при наличии множества скважин в однородном бесконечном пласте установившееся течение описать формулой пластового давления в виде суммы логарифмических членов с одной константой

$$p(x,y) = p_0 - \frac{\mu}{2\pi kh}\sum_{i=1}^{n} Q_i \ln\frac{r_i}{R_i}, \quad r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}\,. \qquad (9.10)$$

В этой формуле Q_i есть дебиты скважин работающих скважин (добывающие скважины имеют отрицательные дебиты, нагнетательные – положительный), r_i – расстояние до оси скважины, R_i – радиус скважины. Что касается постоянной p_o, то её значение подлежит определению. Но на распределение скорости фильтрации оно не влияет, при дифференцировании исчезает.

Отметим, что при таком подходе на бесконечности давление будет ограниченным, если сумма по всем Q_i равна нулю, т.е. закачивается в пласт столько же жидкости, сколько отбирается из пласта. Радиусы скважин обычно одинаковы, но в особых случаях могут быть применены и с большими значениями для увеличения дебита. Решение (9.10) определяет установившееся фильтрационное течение в некоторой конечной области, размеры которой намного больше разрабатываемой в режиме истощения части залежи.

Дублет.

Так называют систему, состоящую из пары скважин в однородном пласте, нагнетательной и добывающей, с равными дебитами. Выберем оси координат так, чтобы ось нагнетательной скважины была расположена в точке (-l,0), а ось добывающей - в точке $(l, 0)$. Радиусы скважин считаем одинаковыми и равными R_c. Решение (9.10) представится в виде

$$p(x,y) = p_0 - \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{r_1}{r_2}, \quad p_0 = \frac{p_н + p_д}{2},$$
$$r_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2}\,. \qquad (9.11)$$

На бесконечности значение пластового давления равны p_0. При $x = 0$, т.е. на всей оси симметрии Oy, $r_1 = r_2$, логарифм обращается в нуль, и давление равно p_0. На левой половине поля, где расположена нагнетательная скважина, давления выше этого значения, а на правой половине поля давления ниже этого значения.

Подсчитаем теперь значения пластового давления на забоях скважин. Для нагнетательной скважины давление на забое получим при $y = 0$ и $x = -l + R_c$. Для добывающей

скважины давление на забое получим при $y = 0$ и $x = l - R_c$. Расстояние между скважинами намного больше радиуса скважины, и это обстоятельство учтём в выкладках, что $R_c \ll l$. Получим для нагнетательной и добывающей скважин соответственно

$$p_н = p_0 - \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{R_c}{2l}, \quad p_д = p_0 - \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{2l}{R_c}. \qquad (9.12)$$

Из формул (9.12) можно найти связь перепада давления с дебитом

$$p_н - p_д = \frac{\mu Q}{\pi kh}\ln\frac{2l}{R_c}, \quad Q = \frac{\pi kh}{\mu}\frac{p_н - p_д}{\ln\dfrac{2l}{R_c}}. \qquad (9.13)$$

Теперь распределение давления для дублета в однородном бесконечном пласте может быть выражено формулой без участия параметров пласта k, h и μ

$$p(x,y) = p_0 - \frac{p_н - p_д}{2\ln\dfrac{2l}{R_c}}\ln\frac{r_1}{r_2}, \quad r_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \qquad (9.14)$$

Отметим, что принцип суперпозиции может быть использован и для многих дуплетов, аналог формулы (9.10) будет выглядеть в форме

$$p(x,y) = p_0 - \frac{\Delta p_i}{2\ln(2l_i / R_i)}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{r_{нi}}{r_{дi}}, \quad r_{нi} = \sqrt{(x - x_{нi})^2 + (y - y_{нi})^2} \qquad (9.15)$$

Значение константы p_0 здесь подлежит определению.

Понятие о циркуляционной системе добычи термальной воды.

Такая система предусматривает добычу термальной воды, снятие тепловой её энергии и обратную закачку остывшей воды в тот же пласт для поддержания пластового давления. Минимально система содержит одну добывающую и одну нагнетательную скважины, т.е. является дуплетом. Формулы (9.13) и им аналогичные для круговых батарей применяются при расчётах, связанных с функционированием циркуляционных систем добычи термальных вод. По ним можно оценивать также дебиты, обусловленные разностью температур нагнетательной и добывающей скважин, зная зависимость плотности от температуры жидкости.

В 80-х годах прошлого века Госплан ДАССР обсуждал вопрос о перспективах использования само циркуляционных систем добычи гидротермальной энергии на базе уже пробуренных на нефть скважин, оказавшихся водоносными. Будет ли работать система, состоящая из одной нагнетательной и одной добывающей скважины за счёт разности плотностей горячей и холодной воды в скважинах? В добывающей скважине температура снижается от пластовой температуры до температуры на устье, меньшей на несколько градусов при высоких дебитах. В нагнетательной скважине установится значительно меньшая температура, после съёма тепла наземным оборудованием. Остывшая вода в нагнетательной скважине создаёт пресс на пласт, благодаря которому образуется дублет. По разности давлений, руководствуясь формулой (9.13), можно сосчитать дебит скважины и оценить то количество тепловой энергии, которое может быть получено парой скважин. Если снимаемая энергия окажется значимой, то можно просить средства у федерального правительства на разработку самоциркуляционных систем и их внедрение. Автором были получены предварительные расчётные оценки. Перевод снимаемой тепловой энергии термальной воды в тонны угля, как выразился председатель Госплана, оказался «холодным душем» для членов комиссии.

Например, нижняя пачка чокракского горизонта Кизлярского месторождения термальных вод (2870-2896 м), вскрытая мощность около 10 м, проницаемость пласта 0.54 мкм², коэффициент продуктивности скважин 300 кубов в сутки на 0.1 МПа, избыточное давление в пласте 0.8 МПа, пластовая температура 110°С. Наземное оборудование снимают 70°С и температура закачиваемой обратно воды составит 40°С. Плотность воды в нагнетательной скважине составляет 1010 кг/м³, тогда как в добывающей скважине она равна 970 кг/м³. Разность плотности в 40 кг/м³ обеспечит на глубине расположения пласта перепад давления $\Delta\rho gH$=40·9.8·2883=1.13 МПа. Это значимый перепад давления, обычные перепады между нагнетательными и добывающими скважинами при вытеснении нефти водой того же порядка или меньше. В (9.13) вязкость считается постоянной, но для воды вязкость меняется. Горячая вода имеет значительно меньшую вязкость. При температурах 40, 60, 80, 100°С вязкость воды составляет

соответственно 0.668, 0.483, 0.364 и 0.289 мПа·с. При 110°С значение вязкости воды составляет 0.28 мПа·с. Учитывая, что основная область имеет пластовую температуру 110°С на начальном этапе разработки можно принять единое для всего пласта значение вязкости μ= 0.3.

Ещё одним параметром, которого можно выбрать для рассмотрения, является расстояние между скважинами $2l$, оно зависит от выбранной пары скважин. Расстояние входит в формулу под знаком логарифма, результат слабо зависит от выбора этого расстояния. Примем $l = 500$ м, $R_c = 0.1$ м и тогда под логарифмом получим 10^4. Подставив принятые значения в (9.13), получим Q=600 м^3/сутки.

Полученный результат кажется не малым, но сравним добытую с водой тепловую энергию с тепловой энергией, получаемой при сжигании каменного угля. Тонна угля дает 27000 МДж, а тонна воды с 1°С – лишь 4.19 МДж, с 70°С даст 293 МДж, умножив на 600 и поделив на 27000, имеем эквивалент 6.5 тонны угля в сутки. Проницаемость пластов обычно встречаются и в 5-10 раз ниже, на практике лучше подобрать пару скважин, которая может дать большие дебиты. Подбор пар скважин по Махачкалинскому и Тарумовскому месторождениям проводился, но начавшаяся перестройка и ликвидация Госплана помешали проведению промысловых экспериментов. Справедливости ради отметим, что с экономической точки зрения было в те годы выгоднее завозить уголь, нежели капвложения, связанные с экологическими рисками добычи термальной воды и обслуживанием технически новых систем.

Лекция 10

Установившаяся фильтрация в однородном пласте.

Добывающая скважина в однородном фильтрационном потоке. Распределение давлений. Компоненты скорости фильтрации. Линии тока. Движение частиц, отмеченных поперёк потока. Динамика их поглощения скважиной. Комплексный потенциал течения. Прямолинейный ряд нагнетательных скважин. Линии тока и линии равного потенциала нагнетательного ряда.

Однородный фильтрационный поток.

Под этим термином подразумевают движение в пористой среде с одной и той же скоростью фильтрации, как по модулю, так и по направлению. Выделенные «псевдо частицы» описывают прямые линии, параллельные друг другу. Они называются линиями тока. Каждой линии можно присвоить значение функции тока ψ, равное $u_0 y$. Тогда разность двух значений функции тока будет определять расход жидкости между этими двумя линиями тока.

Скорость фильтрации постоянна, потому и градиент давления будет везде постоянным. Выберем в качестве направления потока положительное направление оси абсцисс *Ox,* скорость фильтрации обозначим буквой u_0, тогда градиент давления составит согласно закону Дарси $-\frac{\mu u_0}{k}$, где μ есть вязкость жидкости, k представляет собой проницаемость пористой среды. Эти параметры считаются неизменными константами. Интегрируя уравнение $\frac{dp}{dx} = -\frac{\mu u_0}{k}$, для пластового давления получим линейную функцию продольной координаты x, уходящую в плюс ∞ при $x \to -\infty$, и -∞ при $x \to +\infty$. Если принять за нуль пластовое давление при $x = 0$, то для пластового давления получим

$$p(x) = -\frac{\mu u_0}{k} x. \qquad (10.1)$$

Сток в фильтрационном потоке.

Рассмотрим, как изменится равномерный фильтрационный поток, если в начало координат поместить добывающую скважину с постоянным дебитом Q. Согласно принципу суперпозиции, в бесконечном пласте давления можно накладывать друг на друга, добавление к распределению давления линейной функции будет означать наложение однородного фильтрационного потока. Если добавить его к распределению давления одиночной добывающей скважины (9.8), то получим для источника в потоке распределение пластового давления

$$p(x,y) = p_c - \frac{\mu u_0}{k} x + \frac{\mu q}{2\pi k} \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R_c}, \quad q = -\frac{Q}{h}, \quad R_c \le r < \infty. \qquad (10.2)$$

Здесь $q > 0$ – означает дебит на единицу мощности пласта, p_c - давление на забое добывающей скважины. Для добывающей скважины принимают $Q < 0$. Поле скоростей находим дифференцированием (10.2)

$$u(x,y) = u_0 - \frac{qx}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}, \quad v(x,y) = -\frac{qy}{2\pi\left(x^2+y^2\right)} \qquad (10.3)$$

Мы получили простейшее двумерное течение с критической точкой ветвления. Нетрудно видеть из формул, что вдоль оси абсцисс вертикальная составляющая скорости фильтрации обращается в нуль, а горизонтальная составляющая в нуль обращается в единственной точке, которую обозначим a,

$$x = \frac{q}{2\pi u_0} = a. \qquad (10.4)$$

Точка $(a, 0)$ называется критической точкой потока. В нашей задаче такая точка лишь одна. Таких критических точек может быть и много. Как правило, в точках нулевой скорости происходит разветвление линий тока.

Линии тока касаются вектора скорости в каждой своей точке. Для стационарных задач фильтрации, как линия тока, так и закон движения псевдо частицы вдоль линии тока, найдутся интегрированием системы дифференциальных уравнений при заданном начальном положении псевдо частицы

$$\frac{dx}{dt} = u(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x,y), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \qquad (10.5)$$

Задача замечательна тем, что преобразованием к безразмерным переменным она становится универсальной, исчезают параметры задачи. В самом деле, вводя

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \tau = \frac{u_0 t}{a}, \tag{10.6}$$

получим для определения семейства линий тока

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 - \xi}, \tag{10.7}$$

с заданными начальными значениями ξ_0, η_0 . Можно непосредственно задаваться различными начальными значениями и обращением к пакету Mathcad находить линии тока. Лучше получить аналитическое выражение для линий тока и связать семейство линий со значениями функции тока. Оно имеет вид

$$\frac{2\pi\psi(x,y)}{q} = \Psi(\xi,\eta) = \eta - arc\,ctg\,\frac{\xi}{\eta}, \quad \psi(x,y) = \int_{AB} udy - vdx. \tag{10.8}$$

Изолинии безразмерной функции тока $\Psi(\xi,\eta)$ и есть линии тока нашей задачи. Они изображены на рис. 10.1. Единица поделена на 50 частей при изображении поверхности и её изолиний, на рисунке $-5 < \xi < 5, 0 < \eta < 5$.

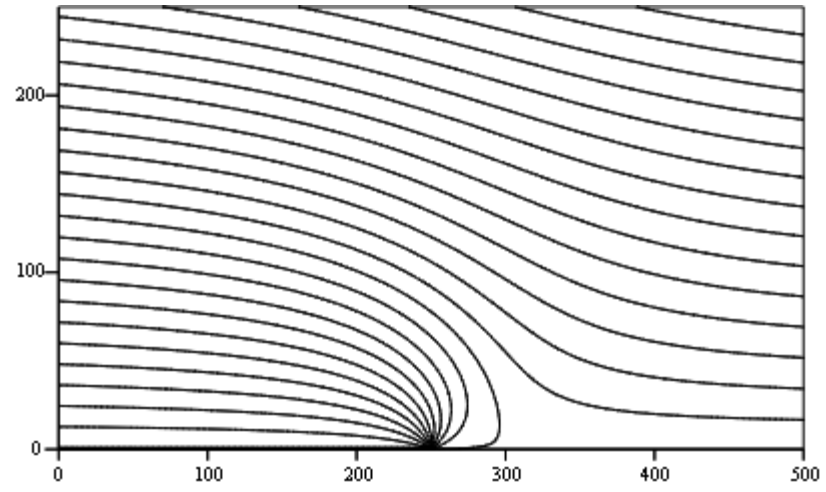


Рис. 10.1. Линии тока для добывающей скважины в однородном фильтрационном потоке. Критическая точка с нулевой скоростью расположена на отметке оси абсцисс 300, скважина расположена на отметке 250.

Практика разработки нефтяных месторождений такова, что основная часть их разрабатывается заводнением, вода вытесняет нефть из порового объёма. При разработке термальных месторождений вода вытесняет воду.

В общих чертах обводнение нефтяной скважины, если отвлечься от физических свойств нефти и воды, можно рассматривать как поглощение скважиной отмеченных частиц на линии, перпендикулярной к линиям тока вдали от скважины. Уравнения (10.7) удаётся проинтегрировать в аналитическом виде переходом на полярный радиус и полярный угол, где они преобразуются к виду

$$rdr = (r\cos\theta - 1)d\tau, \quad r\sin\theta - \theta = \Psi, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = arc\,tg\frac{\eta}{\xi}. \qquad (10.9)$$

Интегрирование дает зависимость полярного угла от времени

$$(\theta + \Psi)ctg\theta - \ln\sin\theta - C(\Psi) = \tau, \qquad (10.10)$$

где постоянная интегрирования для каждой линии тока будет своей, так что она зависит от значения функции тока Ψ. Подбираем эту зависимость так, чтобы для всех линий тока абсцисса ξ была одной и той же при $\tau \to -\infty$ в асимптотическом смысле. Тогда константа интегрирования определится выражением

$$C(\Psi) = -\ln(\pi + \Psi) + C_1, \qquad (10.11)$$

где уже C_1 есть уже универсальная для всех линий тока постоянная, определяющая выбор начала отсчёта времени τ. Условимся отсчитывать время с момента достижения скважины (начала координат) вдоль главной линии тока. Тогда C_1=0. Движение отмеченных частиц будет определяться уравнениями

$$(\theta + \Psi)ctg\theta + \ln\frac{\pi + \Psi}{\sin\theta} = \tau, \quad \eta = \theta + \Psi, \quad \xi = \eta ctg\theta. \qquad (10.12)$$

Первое из них служит для определения полярного угла при заданных Ψ и τ, второе и третье – для определения координат точки. Фиксируя τ, и меняя Ψ от −π до нуля и далее до +∞, получаем положение линии отмеченных частиц. Для фиксированного Ψ уравнения (10.12) определяют закон движения частиц вдоль её траектории (линии тока). В случае вырождения для главной линии тока Ψ=-π закон движения частиц находится особо

$$\theta = \pi, \quad \eta = 0, \quad \xi + \ln(1 - \xi) = \tau. \qquad (10.13)$$

Рассмотрим обводнение ζ скважины во времени, имея под обводнением ζ в виду, поглощенную скважиной долю разности значений функции тока Ψ на участке $-\pi \le \Psi \le 0$. Для начала координат из (10.12) получаем

$$\ln\frac{\pi + \Psi}{\sin(-\Psi)} = \tau, \quad \theta = -\Psi, \quad \zeta = \frac{\pi + \Psi}{\pi}. \qquad (10.14)$$

Заменив функцию тока на обводнённость, получаем закон обводнения скважины в набегающем потоке от времени

$$\tau = \ln \frac{\pi\zeta}{\sin \pi\zeta}. \qquad (10.15)$$

В начальный период, когда обводнённость ещё мала, ока растёт согласно квадратному корню от времени, а при высоких значениях имеет место экспоненциальное приближение к предельному значению 1, т.е.

$$\zeta \approx \frac{2\sqrt{3\tau}}{\pi} \; при \; \tau \to 0, \quad \zeta \approx 1 - e^{-\tau} \; при \; \tau \to \infty. \qquad (10.16)$$

Ниже даны безразмерные времена для некоторых значений ζ

ζ	0	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.98
τ	0	0.105	0.452	1.204	2.214	2.948	3.892

На рис. 10.2 изображены положения линии отмеченных частиц на указанные в таблице времена τ. Вычисления проводились по формулам (10.12). Значения Ψ менялись от π(ζ-1) до 3, по первой формуле определялся полярный угол θ итеративным методом на EXCEL, по двум другим находились координаты линии отмеченных частиц по непоглощённой скважиной части линии.

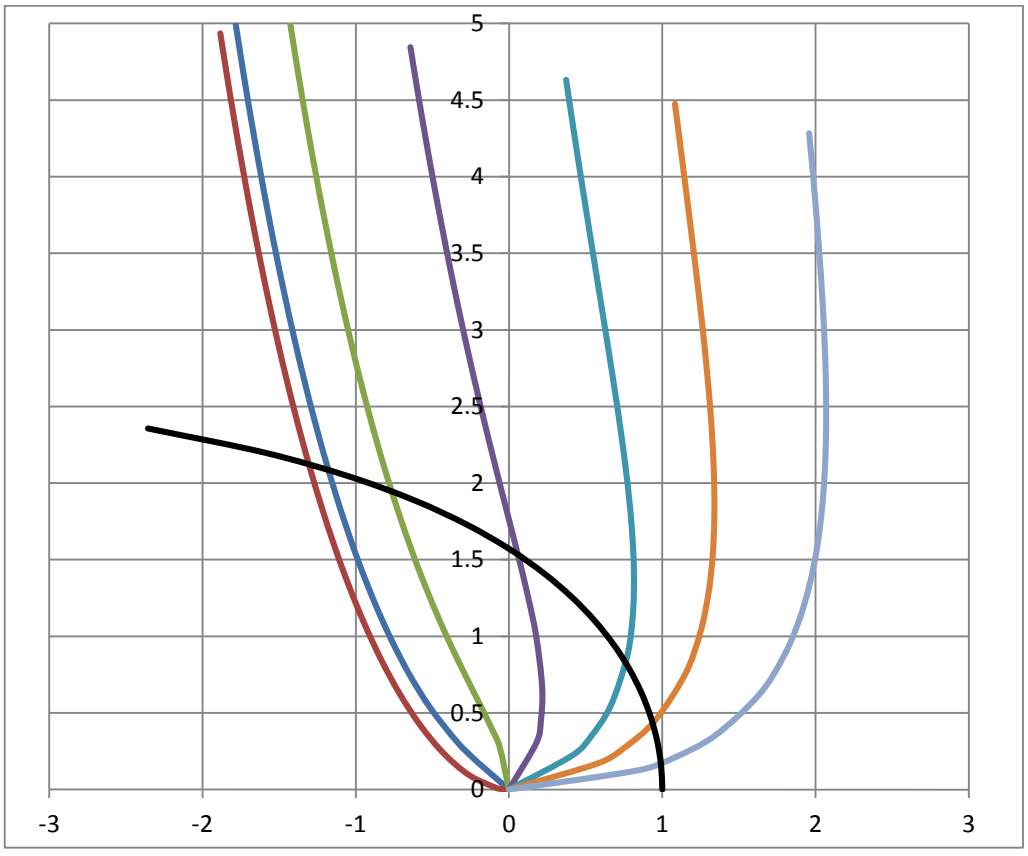


Рис. 10.2. Изменения вертикальной линии частиц жидкости, отмеченных при ξ=-∞, с ростом времени τ (ζ=0; 0.25; 0.5; 0.75; 0.9; 0.95 и 0.98) и с учётом поглощения линий тока добывающей скважиной, расположенной в начале координат.

Решение плоских задач фильтрации и визуализация результатов становится проще и прозрачнее, если пользоваться методами теории функции комплексной переменной, в частности, если ввести комплексный потенциал течения. Для математических, физических и значительной части технических специальностей эти методы хорошо известны. Многие программные пакеты также представляют возможности работать непосредственно с комплексными числами.

Комплексный потенциал течения.

Потенциалом скорости плоского стационарного фильтрационного течения называют функцию координат φ(*x,y*), пропорциональную давлению со знаком минус, определяемую с точностью до постоянного слагаемого φ_0

$$\varphi = -\frac{k}{\mu} p(x,y) + \varphi_0, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad (10.17)$$

Здесь компоненты скорости фильтрации u и v, согласно закону Дарси, выражаются как частные производные потенциала скорости по соответствующим переменным. Из определения видно, что потенциал растёт в сторону движения, тогда как давление снижается. Понятие потенциала скорости может быть введено и для неоднородного пласта, когда проницаемость меняется с изменением координат.

Понятие функции тока связано с линиями тока, в каждой точке которых вектор скорости есть касательная к ней. Для линий тока справедлива пропорция

$$\frac{dx}{u(x,y)} = \frac{dy}{v(x,y)} \quad или \quad u(x,y)dy - v(x,y)dx = 0. \qquad (10.18)$$

Свяжем с каждой линией тока своё значение функции тока. Вдоль линии тока оно должно сохраняться, значит $d\psi = 0$. Подберём ψ так, чтобы

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = u(x,y)dy - v(x,y)dx. \qquad (10.19)$$

Это можно сделать не всегда. Правая часть должна быть полным дифференциалом. Для того, чтобы в правой части был полный дифференциал, требуется равенство перекрёстных производных, т.е.

$$u(x,y)=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v(x,y)=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (10.20)$$

Течения, удовлетворяющие условию (10.20), называют потенциальными. Для несжимаемой жидкости и в отсутствие поглощения или выделения массы жидкости из скелета пористой среды это условие выполнено в силу закона сохранения массы жидкости. Поэтому плоские фильтрационные стационарные течения в случае несжимаемой жидкости потенциальны, причём функции φ и ψ связаны соотношениями Коши-Римана

$$u(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad v(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (10.21)$$

Последнее означает, что существует аналитическая функция $w(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$, действительная часть которой есть потенциал течения, а мнимая часть - функция тока, т.е. $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$.

Например, для однородного потока, направленного вдоль оси Ox, $\varphi=u_0x, \psi=u_0y$. Здесь, очевидно, $W(z)=u_0z$.

Для нагнетательной скважины с дебитом $q>0$ на единицу мощности пласта линиями тока являются лучи, исходящие из начала координат. Функция тока и потенциал течения определяются при $y>0$ выражениями

$$\psi(x,y)=\frac{q}{2\pi}arc\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\psi_0,$$
$$\varphi(x,y)=\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}+\varphi_0 \qquad (10.22)$$

Они образуют комплексный потенциал источника течения с одной комплексной произвольной константой $W_0=\varphi_0+i\psi_0$, которую принимают за нуль.

$$W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\frac{q}{2\pi}\ln z \qquad (10.23)$$

В случае добывающей скважины дебит отрицателен.

Комплексный потенциал прямолинейного ряда.

Считаем число скважин бесконечно, они нагнетательные с одинаковым расходом и расположены на равных расстояниях a друг от друга, фильтрационное течение установившееся, стационарное. Выберем начало координат в одной из скважин и направим ось абсцисс по нагнетательному ряду. Течение образуется суперпозицией бесконечного числа слагаемых источников вида (10.23) с $q > 0$. Комплексный потенциал течения удаётся найти по её особенностям. В точках $x_n = \pm na, n = 0,1,2,\ldots$ комплексная скорость, являющаяся тоже аналитической функцией, имеет особенности типа полюсов. В промежуточных точках на оси абсцисс комплексная скорость, в силу симметрии, обращается в нуль. Обратные комплексной скорости значения $1/W'(z)$ будет аналитической функцией с нулями в точках x_n и полюсами в промежуточных точках. Такие же особенности имеют тригонометрические функции синус и косинус. Попытаемся рассмотреть комплексный потенциал течения, описываемый функцией

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{a}, \quad \frac{dW}{dz} = u - iv = \frac{q}{2a} ctg \frac{\pi z}{a}, \quad q > 0. \quad (10.24)$$

Асимптотическое поведение скорости вблизи скважин при $y \approx 0$ совпадает с распределением скоростей нагнетательной скважины, а при $y \to \infty$ и любом фиксированном значении $x = x_0$, получим однородный фильтрационный поток вдоль ординаты скорости $v = q/2a$. На рис. П.3 изображены линии тока и линии равного потенциала (10.24) для элемента симметрии течения в приведённом случае $q = 1, a = 1$.

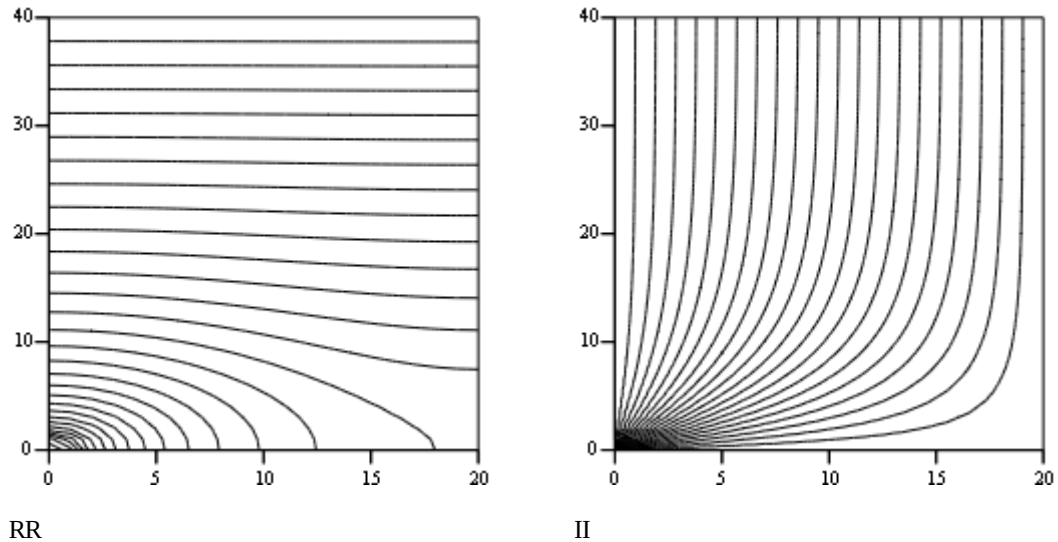


Рис. 10.3. Эквипотенциальные линии и линии тока для нагнетательного ряда скважин. По оси абсцисс деление 20

соответствует значению $a/2$, по оси ординат деление 40 соответствует длине a.

Как видно из рис. 10.3, фильтрационный поток становится равномерным уже на расстоянии, равном расстоянию между скважинами. Линии равного потенциала отклоняются от окружности уже на ранней стадии, при $r > a/20$.

Лекция 11.

Кривые обводнения скважин для плоских течений.

Дуплет. Движение линии отмеченных частиц. Чередующийся ряд нагнетательных и добывающих скважин. Обводнение и охват пласта. Площадная пятиточечная система нагнетательных и добывающих скважин. Пример точного расчета для случая квадратной сетки скважин.

Поле скоростей дуплета.

Пусть в однородном и бесконечном пласте нагнетательная скважина расположена в точке $(-a, 0)$, а добывающая – в точке $(a, 0)$, расход нагнетательной скважины и дебит добывающей скважины одинаковы по объёму и фильтрационное движение в пласте установилось, поле скоростей стационарное. Комплексный потенциал течения запишется в виде суммы потенциалов источника и стока, с разными знаками, т.е. в виде

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \qquad (11.1)$$

Здесь q дебит скважины, приходящийся на единицу мощности пласта. Полный дебит скважины получим, умножив q на мощность пласта. На рис. 11.1 изображены линии тока $\psi = const$ для случая $q = 1$ и $a = 1$, соответствующие верхней полуплоскости. На рис. 11.2 изображены линии равного потенциала $\varphi(x,y)$.

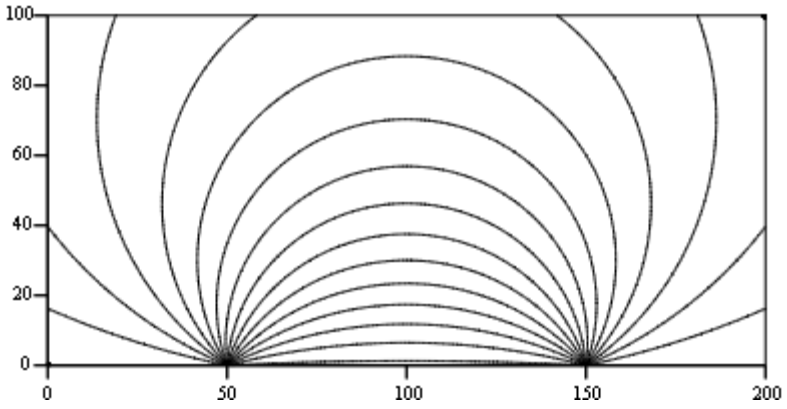
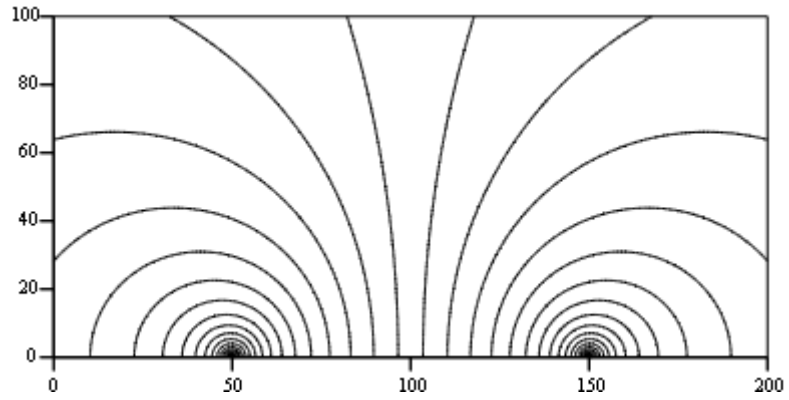


Рис. 11.1. Линии тока для дублета через равные значения функции тока ψ.



ФФ

Рис. 11.2. Линии равного потенциала (соответствуют линиям равных давлений) для дублета. В начале координат потенциал принят равным нулю. Значения потенциала на оси симметрии *Oy* ($x = 0$) всюду равны нулю.

Линии тока и линии равного потенциала для дублета есть окружности. Это позволяет получить некоторые преимущества при решении разного рода задач.

Для поля скоростей, дифференцированием (11.1), имеем

$$u - iv = \frac{qa}{\pi z(a-z)} = \frac{qa}{\pi}\left\{\frac{x(a-x)+y^2}{\left(x^2+y^2\right)\left[(a-x)^2+y^2\right]} - i\frac{(a-2x)y}{\left(x^2+y^2\right)\left[(a-x)^2+y^2\right]}\right\}. \quad (11.2)$$

Модуль скорости фильтрации, который и определяет движение отмеченной частицы вдоль линии тока (дуги окружности), получим из (11.2) как

$$\sqrt{u^2+v^2} = \frac{aq}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(a^2-x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2}}. \quad (11.3)$$

Как видно из формул (11.2-11.3), в декартовых координатах они громоздкие. В полярных координатах чуть проще, но остаются неудобными. Выкладки сильно упрощаются при введении новых геометрических величин, показанных ниже.

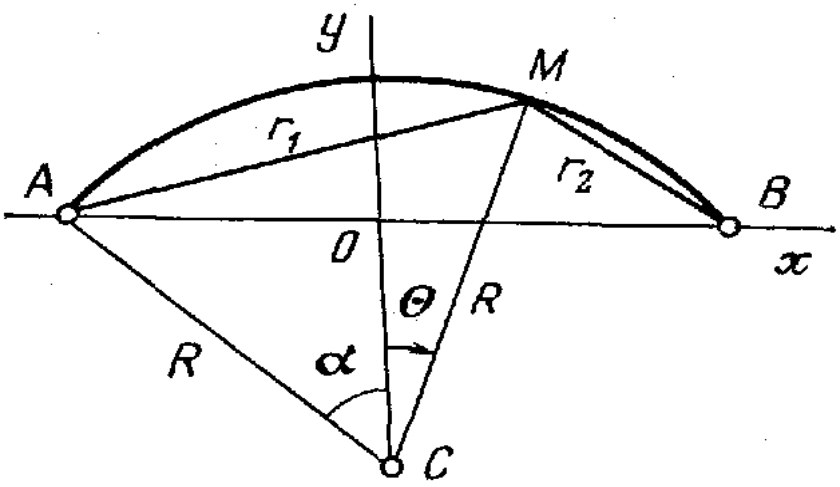


Рис. 11.3. К расчёту движения отмеченной точки М вдоль линии тока.

На рис. 11.3 нагнетательная скважина расположена в точке *A*, добывающая в точке *B*, расстояние *AB=2a*, линия тока *AMB* есть дуга окружности с центром в точке *C*. Вводим центральный угол 2α, опирающийся на дугу *AMB,* и радиус окружности *R*, соответствующий для выделенной линии тока, касательная к которой в точке *A* наклонена к оси абсцисс *Ox* под углом α. Вводим угол θ, отсчитываемый по часовой стрелке от вертикали. Радиус *R* и угол θ есть новые переменные. Вдоль каждой линии тока радиус не меняется, меняется лишь угол θ. Вводим также обозначения: *AO=OB=a*; *OC=h*. Отметим очевидные формулы:

$$\alpha = \arcsin\frac{a}{R}, \quad \theta = \arcsin\frac{x}{R}, \quad R^2 = a^2 + h^2, \quad \pm OC = \pm h = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2y},$$
$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2R\sin\frac{\alpha+\theta}{2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2R\sin\frac{\alpha-\theta}{2}. \qquad (11.4)$$

Нас интересует движение отмеченной жидкой частицы вдоль линии тока и, в частности, время, затрачиваемое ею вдоль выбранной линии тока до достижения добывающей скважины. Расстояние s=*AM* по дуге, равное (α+θ)*R*, проходит со скоростью, большей, чем модуль скорости фильтрации (11.3), в $1/m$ раз, где m есть пористость среды. Вместо (11.3) можно использовать производную по дуговой координате потенциала скорости φ, выраженной в переменных *R* и θ, и тогда для движения отмеченной жидкой частицы *M* получим простую задачу

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \quad \varphi(x,y) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}, \quad s = (\alpha+\theta)R, \quad s(0) = 0.$$

(11.5)

После ряда алгебраических преобразований, получаем для угла θ

$$(\cos\theta - \cos\alpha)\frac{d\theta}{dt} = \frac{q\sin\alpha}{2\pi m R^2}, \quad \theta(0) = -\alpha. \qquad (11.6)$$

Интегрирование с учетом начального условия дает связь угла θ со временем

$$\sin\alpha + \sin\theta - (\alpha+\theta)\cos\alpha = \frac{q\sin^3\alpha}{2\pi m a^2}t. \qquad (11.7)$$

Времена прихода по разным линиям тока отмеченных частиц из точки *A* в точку *B* получим из (11.7), положив θ=α.

$$t = \frac{4\pi m a^2}{q \sin^3 \alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha). \qquad (11.8)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получим время прихода t_0 по главной линии тока $\psi = 0$, являющейся отрезком прямой AB

$$t_0 = \frac{4\pi m a^2}{3q}, \quad \tau(\alpha) = \frac{t}{t_0} = 3\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha}. \qquad (11.9)$$

К примеру, для параметров: $m = 0.22; a = 200$ м; $q = 50\frac{\text{м}^2}{\text{сут}}$, время движения по главной линии тока составляет 737 суток, т.е. около 2-х лет. Для углов α=30°, 60°, 90°, 120° и 150° значения τ(α) составили: 1.117; 1.582; 3; 8.84 и 66.4 соответственно. На рис. 11.4 изображена кривая обводнения – доля пришедших отмеченных частиц в зависимости от безразмерного времени τ.

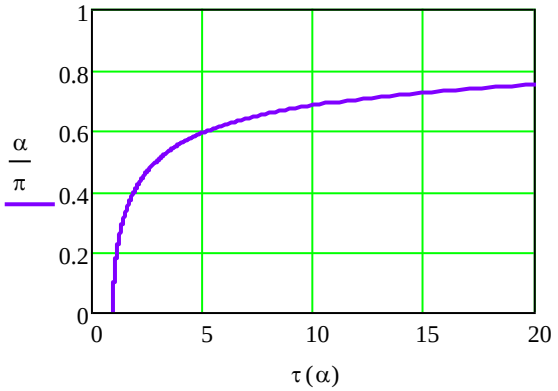


Рис. 11.4. Кривая обводнения добывающей скважины дублета. Водный период длится бесконечно долго.

Формулу (11.7) можно использовать для изображения последовательных положений отмеченных частиц жидкости, закачанных в нагнетательную скважину. При проведении расчётов времени достижения данной точки (x,y) линией отмеченных частиц некоторые сложности возникают вблизи скважин и на главной линии тока, где η обращается в нуль. Для определения времени выражаем в безразмерных декартовых координатах ξ и η углы α и θ с помощью легко проверяемых формул

$$\alpha(\xi,\eta) = arcctg\frac{1-\xi^2-\eta^2}{2\eta}, \quad \theta(\xi,\eta) = \arcsin\left(\xi\cdot\sin\alpha(\xi,\eta)\right),$$
$$\tau(\xi,\eta) = \frac{3}{2}\frac{\sin\alpha + \sin\theta - (\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin^3\alpha}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{a}. \qquad (11.10)$$

На рис 11.5 приведены последовательные положения контура отмеченных частиц для верхней полуплоскости через равные промежутки времени.

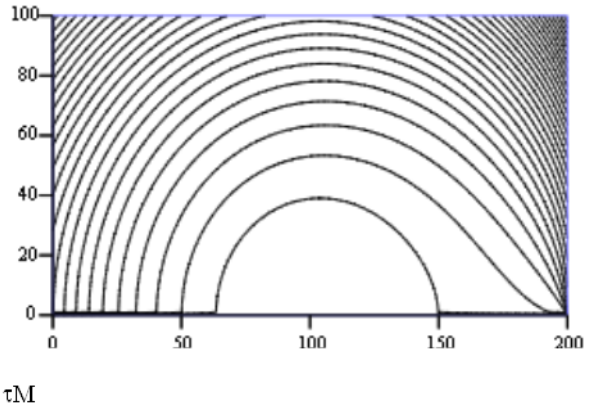


Рис. 11.5. Движение контура отмеченных частиц от нагнетательной скважины, расположенной на оси абсцисс с меткой 100, через равные промежутки времени. Добывающая скважина расположена на оси абсцисс с меткой 200.

Чередующийся ряд нагнетательных и добывающих скважин.

Пусть нагнетательные и добывающие скважины расположены вдоль оси абсцисс, на равных расстояниях a друг от друга, в точках $\pm na$. Пусть дебиты всех скважин одинаковы и равны q, чётным значениям n соответствуют нагнетательные скважины, а нечётным – добывающие скважины. Комплексный потенциал представится в виде

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \tan \frac{\pi z}{2a}. \qquad (11.11)$$

Выделив здесь мнимую часть и задаваясь значениями функции тока ψ, находим уравнение для линий тока в виде

$$\operatorname{sh} \frac{\pi y}{a} = \tan \theta_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{a}, \qquad (11.12)$$

где θ_0 представляет собой угол, под которым выбранная линия тока наклонена к оси абсцисс в начале координат. Для верхней полуплоскости $0 < \theta_0 < \pi/2$. Вычислив по производной комплексного потенциала модуль скорости фильтрации, для времени движения по линии тока получим дифференциальную зависимость

$$dt = \frac{2a}{mq \cos^2 \theta_0} \frac{\sin \pi\xi d\xi}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0 \cdot \sin^2 \pi\xi}}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{a}. \qquad (11.13)$$

Интегрируя последнее соотношение от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, получим времена прихода частиц жидкости в добывающую скважину по разным линиям тока, определяемым начальным углом её наклона θ_0 к оси чередующего ряда

$$t = t_0 \frac{2\theta_0}{\sin 2\theta_0}, \quad t_0 = \frac{4a^2}{\pi m q}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}. \tag{11.14}$$

Время t_0 представляет собой предельное значение, при $\theta_0 \to 0$ $t \to t_0$. Оно соответствует времени прихода частицы жидкости по главной линии тока, для которой $\psi = 0$. Вместо угла θ_0 вводим обводнённость скважины ζ. Очевидно, в добывающей скважине, в силу равенства дебитов, доля воды будет равно доле центрального угла в угле π, т.е. $\pi\zeta = 2\theta_0$. Поэтому угол θ_0 заменяем на $\pi\zeta$ и преобразуем формулу для определения роста обводнённости во времени к весьма простому и удобному виду

$$\tau = \frac{\pi\zeta}{\sin \pi\zeta}. \tag{11.15}$$

На рис. 11.6 показаны линии равного потенциала и линии тока для элемента симметрии течения $0 < x < a/2$ и $y > 0$. Изображения ограничено значениями $y < a$. Деления на осях соответствуют 40:1, сороковой доле отрезка a.

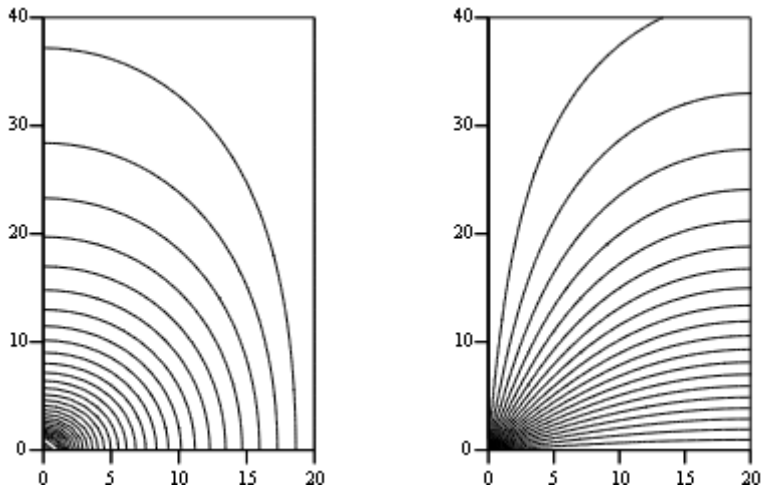


Рис. 11.6. Линии равного потенциала и линии тока для чередующего ряда нагнетательных и добывающих скважин с равными дебитами.

Характерные значения обводнённости ζ=0.25; 0.5; 0.75 и 0.90 достигаются в моменты времени τ=1.1107; 1.5708; 3.3322 и 9.1497.

На рис. 11.7 представлена кривая обводнения от $\tau = 1$ и до $\tau = 11$. В начальный момент обводнения для обводнённости имеет место закон квадратного корня, а для очень больших времён $\tau \gg 1$ справедлива гиперболическая асимптотика

$$\zeta \approx \frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{\tau - 1}, \quad 1 < \tau < 1.2, \quad \zeta \approx 1 - \frac{1}{\tau}, \quad \tau > 10\,. \tag{11.16}$$

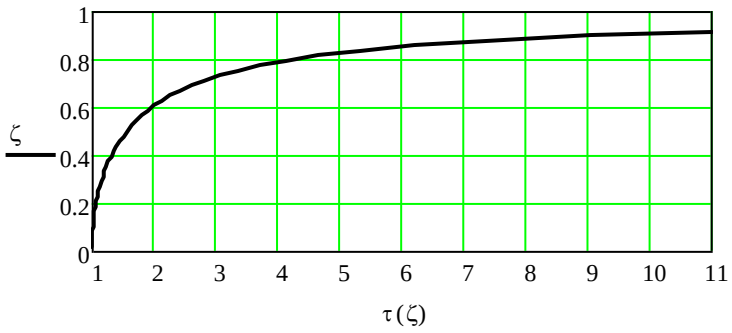


Рис. 11.7. Кривая обводнения добывающего ряда скважин.

Для линии отмеченных частиц, входящих в пласт в момент времени $t = 0$, интегрированием (11.13) и переходя к безразмерному виду, получаем

$$\xi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\sin(\theta_0 - \tau\sin 2\theta_0)}{\sin\theta_0}. \tag{11.17}$$

Вторая безразмерная координата η для линии отмеченных частиц получится по уравнению для линии тока (11.12), которую перепишем в виде

$$\eta = \frac{1}{\pi}\ln\left(f + \sqrt{f^2 + 1}\right), \quad f = \tan\theta_0 \cdot \sin\pi\xi. \tag{11.18}$$

Для каждого фиксированного момента времени τ формулы (11.17) и (11.18) дают возможность построить положение линии отмеченных частиц до и после начала обводнения скважины и увидеть область, охваченную закачиваемой водой с момента $t = 0$. Координаты ξ и η при этом следует рассматривать как параметрическое задание контура заводнённой части, причём параметром служит угол наклона линии тока θ_0. До начала обводнения добывающей скважины, т.е. для всех $\tau < 1$, углы θ_0 можно брать изменяющимся в пределах от 0 до π/2. Однако, после начала обводнения, часть жидких частиц будет поглощена добывающей скважиной. Не поглощённой остаётся часть частиц, которая находится на линиях тока с большими

углами наклона. Должно быть $\theta_0 \geq \theta_w$, где θ_w некоторое значение, зависящее только от времени τ. Из формулы (11.17) следует, что ξ не превосходит 1, а аргумент для арккосинуса по модулю тоже не должен превосходить 1. Искомое значение находим из условия, что аргумент равен -1. Тогда получим уравнение

$$\sin(\theta_w - \tau \sin 2\theta_w) = -\sin\theta_w. \qquad (11.19)$$

Отсюда следует, что не поглощённые частицы находятся на тех линиях тока, угол наклона которых в начальной точке больше θ_w, определяемого уравнением

$$\frac{\sin 2\theta_w}{2\theta_w} = \frac{1}{\tau}, \quad \tau > 1. \qquad (11.20)$$

При обводнённости ζ=0; 0.25; 0.50; 0.75 и 0.90 мы получили выше времена τ=1; 1.1107; 1.5708; 3.3322 и 9.1497. Их обратные значения составляют: τ^{-1}=1; 0.9003; 0.6366; 0.3001 и 0.1093. Соответствующие значения углов θ_w в радианной мере составят: 0; 0.393; 0.792; 1.178 и 1.414.

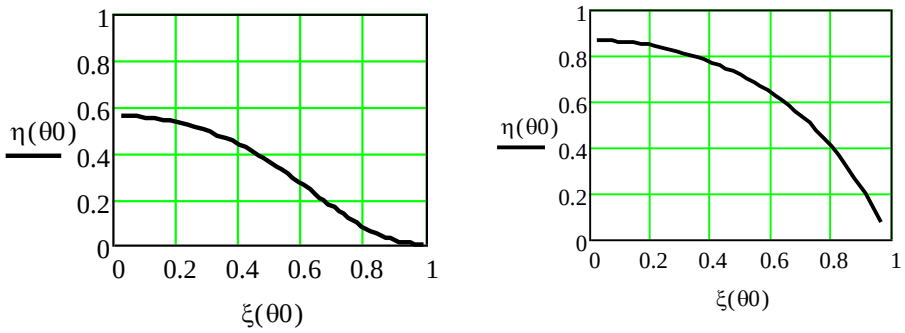


Рис. 11.8. Положения линии отмеченных частиц на момент прорыва и на момент обводнённости в 75% для чередующего ряда скважин.

На рис. 11.8 приведены сосчитанные положения линии отмеченных частиц на момент прорыва $\tau = 1$ и момент достижения обводнённости $\zeta = 0.75$. Видно, что охват вытеснением в поперечном направлении имеет порядок расстояния между скважинами.

При разработке больших по площади месторождений широкое распространение получили площадные системы заводнения. В работе [12] приведены комплексные потенциалы ряда таких систем заводнения.

Лекция 12

О применении конечно-разностных методов.

Неоднородный пласт, разрабатываемый сеткой скважин. Разностная схема решения задачи распределения пластового давления по значениям на контуре и по данным дебитам. Пример расчета для квадратного элемента пятиточечной системы площадного заводнения.

Неоднородный пласт.

Если на своём протяжении пласт имеет меняющуюся проницаемость, то его называют неоднородным. В таких пластах ещё возможна и послойная неоднородность по проницаемости. Вертикальная скорость в неоднородном пласте может и присутствовать, она на кровле и подошве пласта равна нулю, а по мощности h пласта пренебрежимо мала. Вводят усреднённые по толщине составляющие скорости по горизонтальным координатам. Распределение пластового давления в горизонтальном неоднородном пласте определяют по уравнению (8.16)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0;\quad \varepsilon=\frac{kh}{\mu} \tag{12.1}$$

Комплекс ε называют гидропроводностью пласта. Обычно для пластов платформенного типа толщина h составляет несколько метров и намного (на 2 порядка) меньше горизонтальных размеров пласта. Проницаемость и толщину рассматривают как функцию горизонтальных координат. Таким образом, в неоднородном пласте давление подчиняется не уравнению Лапласа, а более общему однородному уравнению эллиптического типа (12.1).

Рассмотрим конечный по протяжённости неоднородный пласт с добывающими и нагнетательными скважинами, расположенными по площади залежи. Будем считать заданными дебиты скважин Q_i, согласно установленному технологическому режиму. Будем также полагать, что на внешней границе залежи задано либо пластовое давление, (если эта часть границы является контуром питания), или же задано условие непроницаемости, т.е. нормальная производная к контуру границы равна нулю. Область решения для уравнения (12.1) представит часть плоскости, ограниченную

внешним контуром, продырявленную в скважинах, где решение имеет логарифмическую особенность. Аналитическое решение искать можно лишь в очень простых случаях, практически встречаются случаи, когда решение может быть получено только численно. Желательно при этом учесть особое поведение решения в окрестности скважин. Такой учёт заметно снижает погрешность численного решения. Есть готовые пакеты программ, как зарубежные, так и отечественные, для гидродинамического моделирования процесса разработки с применением различных технологий поддержания пластового давления. Руководящие инструкции предусматривают применение гидродинамического моделирования при создании технологических схем и проектов разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений с геологическими запасами более 30 млн. тонн нефти.

Вычислительные трудности решения задач состоят в наличии внутри области особых точек, где пластовое давление имеет логарифмические особенности. Воронка давления обычно простирается до нескольких метров, тогда как шаг конечно-разностной сетки составляет десятки метров. Резкое снижение или повышение пластового давления происходит в окрестностях скважин. Графически поверхность пластового давления игольчатая, в добывающих скважинах иглы направлены вниз, в нагнетательных скважинах они направлены вверх. Внутри сеточной области будут узлы, в которых разностная схема меняет свою конструкцию, в этом смысле разностные уравнения теряют «однородность». Узлы разностной сетки можно подразделить на «обыкновенные», если рядом с ним нет скважин, и «особые», когда она есть. Вблизи скважин желательно накладывать асимптотическое поведение решения (12.1) при заданном дебите и плавно воссоединять с разностным решением.

На рис.12.1 изображён график поверхности дублета, когда сетка, на которой найдены расчётные значения, не велика, порядка 20x20. В окрестности скважин график поверхности имеет вид шпиля, логарифмического поведения не видно.

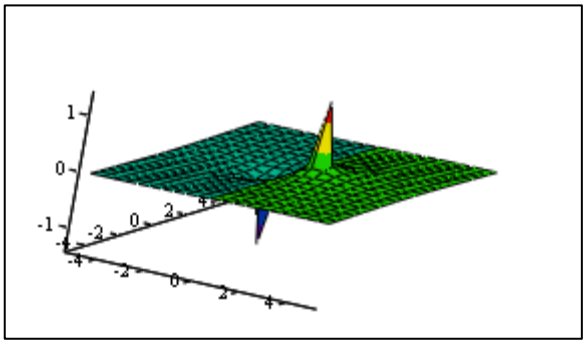


Рис. 12.1. График поверхности давлений для дублета на грубой сетке проведения расчётов в узлах.

Ф

Разностная схема.

Опишем реализованную в пакете Mathcad разностную схему решения краевой задачи Дирихле для уравнения (12.1) для случая отсутствия скважин, когда все точки обыкновенные. Область решения, как правило, разбивают на равные мелкие прямоугольники координатными линиями. Точки пересечения линий называют узлами сетки. Аппроксимируют уравнение (12.1) на пятиточечном шаблоне разностной схемой 2-го порядка точности. Существуют и другие шаблоны (7 или 9 точек), обеспечивающие более высокую точность. Для пятиточечного шаблона используются узлы сетки, образующие крест с центром в (x_i, y_j), т. е. точки: (x_{i+1}, y_j); (x_i, y_{j+1}); (x_{i-1}, y_j); (x_i, y_{j-1}). Кроме этих узлов вводим ещё и промежуточные точки: $(x_{i+1/2}, y_j)$; $(x_i, y_{j+1/2})$; $(x_{i-1/2}, y_j)$; $(x_i, y_{j-1/2})$. На рис. 12.2 эти точки показаны крестиками. В них будем аппроксимировать первые производные, по первым производным получим значения вторых производных в центральном узле. Договариваемся и об обозначениях: буквой p условимся обозначать и точное решение задачи, но тогда обязательно присутствие аргументов. Например, $p(x_i, y_j)$ будет обозначать точное аналитическое решение в узле сетки, $p_{i,j}$ будет обозначать тоже точное решение разностной задачи в узлах сетки.

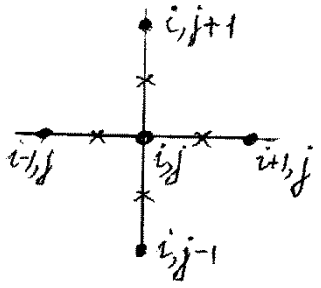


Рис.12.2. Пятиточечный шаблон разностной схемы.

Замену производных в (12.1) производим по приближённым формулам, полагая решение линейным в пределах одного звена разностной сетки [13]

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{i+1/2,j} \approx \varepsilon_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \quad \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{i-1/2,j} \approx \varepsilon_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x},$$
$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{i,j+1/2} \approx \varepsilon_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}, \quad \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{i,j-1/2} \approx \varepsilon_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \qquad (12.2)$$

Вторые производные получаем как отношение их разности к шагу сетки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}\right)\bigg|_{i,j} \approx \frac{\varepsilon_{i+1/2,j} p_{i+1,j} - \left(\varepsilon_{i+1/2,j} + \varepsilon_{i-1/2,j}\right) p_{i,j} + \varepsilon_{i-1/2,j} p_{i-1,j}}{\Delta x^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y}\right)\bigg|_{i,j} \approx \frac{\varepsilon_{i,j+1/2} p_{i,j+1} - \left(\varepsilon_{i,j+1/2} + \varepsilon_{i,j-1/2}\right) p_{i,j} + \varepsilon_{i,j-1/2} p_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \qquad (12.3)$$

Сложив и приравняв нулю, получаем разностные уравнения простой структуры. Дробные индексы здесь употреблены нами для наглядности. В машинной реализации при программировании приходится пользоваться целыми индексами. Напрашивается обозначения отношений $\varepsilon/\Delta x^2$ и $\varepsilon/\Delta y^2$ новыми буквами. Вводим два массива $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$, которые могут быть получены из массивов гидропроводности по направлениям координатных осей,

$$\alpha_{i,j} = \frac{\varepsilon_{i+1/2,j}}{\Delta x^2}, \quad \beta_{i,j} = \frac{\varepsilon_{i,j+1/2}}{\Delta y^2}. \qquad (12.4)$$

Тогда уравнение (12.1) заменяется для внутренних точек разностной схемой

$$\alpha_{i,j} p_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} p_{i-1,j} + \beta_{i,j} p_{i,j+1} + \beta_{i,j-1} p_{i,j-1} -$$
$$\left(\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j} + \beta_{i,j} + \beta_{i,j-1}\right) p_{i,j} = 0. \qquad (12.5)$$

Получилось, что значение пластового давления в центральном узле должно быть равно средневзвешенному значению окружающих точек. Для однородного пласта и квадратной разностной сетки значение пластового давления в центральном узле будет равно среднему арифметическому значению пластовых давлений в четырёх окружающих точках пятиточечного шаблона. При известных граничных условиях

пакет Mathcad позволяет одним обращением найти решение краевой задачи для квадратной сетки узлов конечно-разностной схемы.

Метод итераций.

Уравнение (12.5) позволяет по значениям в четырёх окружающих узел точках уточнить значение пластового давления в узле (i,j). Метод итераций применяют при известных значениях давления на границе области и ряде точек внутри области любой формы. Задаются правдоподобным начальным приближением. Далее уточняют это приближение, находят новые значения в искомых точках согласно (12.5). Эти новые значения $pp_{i,j}$ есть первое приближение. Для ускорения сходимости прибегают к параметру релаксации r. Находят поправку $dp_{i,j} = pp_{i,j} - p_{i,j}$. Для получения первого приближения берут сумму с увеличенной поправкой, $p1_{i,j} = pp_{i,j} + r \cdot dp_{i,j}$, где коэффициент увеличения поправки r называют числом релаксации. Опыт показывает, что r зависит от задачи, в большинстве случаев его берут в пределах 1.6-1.8. После получения нового приближения процесс повторяется до тех пор, пока максимальная по всем узлом поправка не станет меньше заданной точности. Не стоит задаваться большой точностью, это резко увеличивает время счёта. Точность 4 знака приемлема. В пакете Mathcad предусмотрена специальная процедура *relax*, позволяющая для квадратной сеточной области, решить систему (12.5) при заданных значениях искомой функции во всех граничных узлах сетки. Однако область залежи не всегда удается накрыть квадратной сеткой с прямоугольными ячейками, а в нашем случае наличия скважин внутри области ряд внутренних узлов могут иметь фиксированные значения давлений.

Замена криволинейной области сеточной требует некоторого уточнения понятия граничных и внутренних узлов сетки. Для выбранного пятиточечного шаблона узел будем считать внутренним, если для неё можно написать аппроксимацию в виде (12.5). В противном случае узел либо внешний, либо особый. Для внутренних узлов нужно, чтобы существовал 5-ти точечный шаблон, и чтобы можно было найти вторые производные. В граничных узлах, для которых нет 5-ти точечного шаблона, либо дано значение давления, либо дано

условие отсутствия притока жидкости, которое позволяет установить симметрию значений давлений с давлениями в соседних узлах и обобщить свойство среднего [14,15].

Вблизи скважин некоторые узлы сетки могут попасть в логарифмическую воронку, где изменение давления пропорционально логарифму отношения к радиусу скважины её расстояния от оси скважины. Для двумерных сеток шаг составляет 10 и более метров, и на таких расстояниях изменение давления может быть велико. Разностная аппроксимация, которая предполагает малые изменения искомой функции, становится сомнительной. Если радиус скважины взять 0.1 м, то на расстояниях 1, 2, 5 и 10 метров изменения давления будут пропорциональны числам 2.30, 3.00, 3.91 и 4.61 соответственно. Эти изменения не малые, и чтобы снизить погрешности численного решения, желательно для близких к скважинам узлов сетки воспользоваться асимптотикой и фиксировать в них давления.

Технологический режим эксплуатации обычно предусматривает сохранение дебита скважины на текущий месяц. Измерения пластового давления проводят 2 раза в год согласно инструкциям. Заданными можно считать как забойные давления, так и дебиты. Их значения должны быть согласованы с гидропроводностью. Для узлов сетки, окружающих скважину, лучше вычислить давления в узлах сетки по дебиту и забойному давлению, фиксировать эти значения при итерациях. На рис. 12.3 показаны узлы сетки, где давления заранее считаются по дебиту.

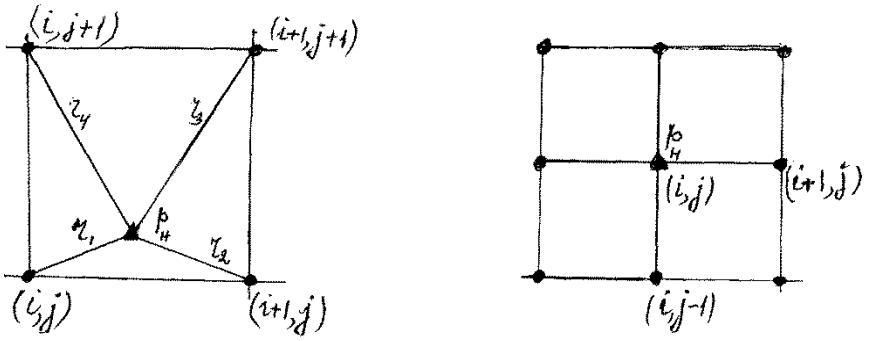


Рис. 12.3. По давлению $p_н$ на забое и расходу в нагнетательной скважине рассчитываются и фиксируются давления в окружающих скважину узлах конечно-разностной сетки.

Разностные аппроксимации с поправками.

Можно расписать разностную схему для окружающих скважину четырёх узлов сетки так, чтобы они выглядели однородно, как (12.5). Если расчёт производится по заданным давлениям на забоях добывающих скважин, то для получения поправок можно пользоваться логарифмическим профилем давления. От узла-скважины, имеющего индексы (*i,j*) и давление p_c, до соседних узлов (*i+1,j*), (*i,j+1*), (*i-1,j*) и (*i,j-1*) фильтрационное течение полагаем радиальным. Производные по координатам между узлами в средних точках не определяются как отношение разности давлений к шагу сетки. Эту производную лучше найти по формуле (9.4), которая в пределах от скважины до правой соседней точки (*i+1,j*) имеет логарифмический вид

$$p(x,0) = p_c + \left(p_{i+1,j} - p_c\right)\frac{\ln\left(x/R_c\right)}{\ln\left(\Delta x/R_c\right)}. \qquad (12.6)$$

Находим теперь производную при $x = \Delta x/2$. Получаем

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i+1/2,j} = \frac{2}{\ln\left(\Delta x/R_c\right)}\cdot\frac{p_{i+1,j} - p_c}{\Delta x}. \qquad (12.7)$$

Нетрудно видеть, что при аппроксимации производной появился поправочный множитель, учитывающий преобразование течения в осесимметричный вид. Заданные давления в скважинах можно относить к узлам и в процессе итераций их не менять, а в массивы с проницаемостями вводить множители, равные по осям соответственно $1/\ln(\Delta x/R_c)$, $1/\ln(\Delta y/R_c)$. Деление на 2 обусловлено уменьшением в 2 раза сечения сектора на границе ячеек. Эти множители вводятся в массивы $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ соответственно, когда по соседству имеется узел-скважина.

Возникает вопрос – а велика ли указанная поправка? При шаге сетки в 10 м и радиусе скважины 0.1 м поправка составит 1/ln(100)=0.217, что не мало. Радиальность поток, примыкающий к скважинам, почти в 5 раз уменьшил пропускную способность жидкости в нашем примере. Поправку рекомендуется учитывать. Реальные расчёт показывает, что поправка может быть различной, в зависимости от радиуса скважины и шага сетки, а скорость сходимости итераций снижается.

Если заданы не давления в скважинах, а дебиты, то вводится неизвестное значение давления в узловой точке (*i,j*).

Оно и приписывается давлению в скважине и вычисляется в процессе последовательных приближений. Для каждого соседнего со скважиной узла может быть вычислен поток по своему треугольному сектору. Эти притоки по четырём секторам, как правило, представляют формулами (нумерация против хода часовой стрелки)

$$Q_1 = \theta_1 \cdot \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}\left(p_{i+1,j} - p_{i,j}\right); \quad Q_2 = \theta_2 \cdot \varepsilon_{i,j+\frac{1}{2}}\left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right);$$

$$Q_3 = \theta_1 \cdot \varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}\left(p_{i-1,j} - p_{i,j}\right); \quad Q_4 = \theta_2 \cdot \varepsilon_{i,j-\frac{1}{2}}\left(p_{i,j-1} - p_{i,j}\right); \qquad (12.8)$$

$$\theta_1 = \frac{2arctg\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{\ln\dfrac{\Delta x}{R_c}}; \quad \theta_2 = \frac{2arctg\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}{\ln\dfrac{\Delta y}{R_c}}.$$

Дебит скважины Q представляет собой сумму этих четырёх величин. Геометрических множителей всего 2. Уравнение для определения давления $p_{i,j}$ в скважине-узле записывается с отличной от нуля правой частью, в виде

$$\theta_1\alpha_{i,j}\left(p_{i+1,j} - p_{i,j}\right) + \theta_2\beta_{i,j}\left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right) +$$
$$\theta_1\alpha_{i-1,j}\left(p_{i-1,j} - p_{i,j}\right) + \theta_2\beta_{i,j-1}\left(p_{i,j-1} - p_{i,j}\right) = Q_k \qquad (12.9)$$

Уравнение получилось той же структуры, что и для обычных узлов (12.5), но оно неоднородно и при коэффициентах появились поправки. Для добывающих скважин дебит имеет отрицательные значения, для нагнетательных скважин он положителен. Такие уравнение будут написаны для узлов, соседних со скважинами, или попавших в скважины. Но решение с введёнными поправками всегда оставляет неудовлетворённость, как содержащую неизвестную погрешность.

Пример расчёта.

Рассмотрим квадрат $0 \le x \le a, 0 \le y \le a$. В точке (0,0) пусть расположена нагнетательная скважина с забойным давлением $p_{\text{н}}$, а в точке (a, a) расположена добывающая скважина с забойным давлением $p_{\text{д}}$. Границы квадрата представляют собой линии тока. Пласт однороден, можно гидропроводность ε убрать, или принять её за 1. Выбираем число делений сторон квадрата n_x=n_y=n и тогда все $\alpha_{i,j} = \beta_{i,j}$

одинаковы для всех промежуточных точек узлов, их тоже можно убрать из (12.9). В соседних со скважинами узлах поправки составят при заданных забойных давлениях, согласно формуле (12.7), значения

$$\theta = 2 / \ln\left(\frac{a}{nR_c}\right) \qquad (12.10)$$

Например, для a=400 м, n=16, $R_c = 0.1$ м поправка будет θ=0.362. С увеличением числа делений слабо растут и значения поправок. Надо найти распределение давления внутри квадрата разностным методом, учитывая логарифмический профиль воронки давления в зонах пласта, примыкающих к скважинам.

Узлы разностной сетки располагаются в точках с координатами

$$x_i = a\frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad y_j = a\frac{j}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12.11)$$

Давления известны в двух узлах с номерами (0,0) и (n,n). Соседними со скважинами являются узлы: (0,1) и (1,0) – с нагнетательной; (n-1,n) и (n,n-1) – с добывающей. Поправки надо вводить лишь для 4-х звеньев между узлами от (0,0) до (0,1) и до (1,0), и ещё от (n,n) до (n-1,n) и (n,n-1). Ниже расписаны разностные уравнения для внутренних точек области, для граничных точек без вершин квадрата, и для вершин квадрата, включая скважины. Они расписаны в виде, удобном для понимания свойства среднего и их получения из уравнения Лапласа.

Внутренние точки области течения:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4}\left(p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1}\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}-1. \qquad (12.12)$$

На нижней границе, где i=1,2,...,n-1; j=0, не существующие значения $p_{\mathrm{i,j-1}}$, согласно условию непроницаемости, заменяем на их отражения относительно оси абсцисс, т.е. на $p_{\mathrm{i,j+1}}$. Появится коэффициент 2. Но для узла i=1, j=0 необходим множитель θ, в результате чего разностную аппроксимацию (12.9) пищем в виде $-\theta\left(p_{1.0} - p_{0,0}\right) + \left(p_{2.0} - p_{1,0}\right) + 2\left(p_{2.1} - p_{1,0}\right) = 0$, откуда для первого узла на этой границе получим особое уравнение с известным значением $p_{0,0} = p_{\mathrm{н}}$.

$$p_{1,0} = \frac{1}{3+\theta}\left(\theta p_{н} + p_{2,0} + 2p_{1,1}\right),$$
$$p_{i,0} = \frac{1}{4}\left(p_{i-1,0} + p_{i-1,0} + 2p_{i,1}\right) \quad . \qquad (12.13)$$

На верхней границе, где i=1,2,...,n-1; j=n, не существующие значения $p_{\mathrm{i,n+1}}$, согласно условию непроницаемости, заменяем на их отражения относительно оси абсцисс, т.е. на $p_{\mathrm{i,n-1}}$. Появится снова коэффициент 2. Но для узла i=n-1, j=n необходим множитель θ, в результате чего разностную аппроксимацию (12.9) можно написать в виде $\theta\left(p_{n.n} - p_{n-1,n}\right) - \left(p_{n-1.n} - p_{n-2,n}\right) + 2\left(p_{n-1.n-1} - p_{n-1,n}\right) = 0$, откуда для узла ($n$-1,$n$) на верхней границе получим особое уравнение с известным значением $p_{n,n} = p_{\text{д}} = 0$.

$$p_{n-1,n} = \frac{1}{3+\theta}\left(\theta p_{д} + p_{n-2,n} + 2p_{n-1,n-1}\right),$$
$$p_{i,n} = \frac{1}{4}\left(p_{i-1,n} + p_{i-1,n} + 2p_{i,n-1}\right) \qquad (12.14)$$

Аналогично пишутся уравнения на левой (i=0) и правой (i=n) границе с поправками логарифмическую поправку θ в точках (0,1) и (n,n-1).

В тупиковых угловых точках (n,0) и (0,n) применяется двойное отражение

$$p_{n,0} = \frac{1}{2}\left(p_{n,1} + p_{n-1,0}\right), \quad p_{0,n} = \frac{1}{2}\left(p_{0,n-1} + p_{1,n}\right). \qquad (12.15)$$

Формулы (12.12)-(12.15) в принципе позволяют реализовать метод релаксации непосредственно для квадратной области. Но гораздо проще воспользоваться симметрией задачи и найти решение в одном из треугольников, образованного пересечением диагоналей квадрата. Диагональ, соединяющая скважины, разбивает квадрат на зеркально симметричные треугольники, для всех узлов сетки, лежащих на этой главной диагонали, справедлива схема

$$p_{i,i} = \frac{1}{2}\left(p_{i+1,i} + p_{i,i-1}\right) = \frac{1}{2}\left(p_{i-1,i} + p_{i,i+1}\right). \qquad (12.16)$$

Такая замена позволяет ограничиться одним треугольником вместо квадрата.

Из условия задачи, очевидно, что на второй диагонали квадрата $y = a - x$ пластовые давления равны среднему

арифметическому значений забойных давлений в нагнетательной и добывающей скважинах, т.е. $\mathrm{p}(x, a-x) = (p_{\text{н}} + p_{\text{д}})/2$. Поэтому естественно ограничиться проведением итераций в первой половине диагонального треугольника. Ввиду линейности задачи за уровень отсчёта давлений примем это среднее значение, а за масштаб – половину их разности, т.е. достаточно ввиду линейности решить задачу при $p_{\text{н}} = 1, p_{\text{д}} = -1$. Значения давлений по второй диагонали все становятся равными нулю, $p_{i,n-i} = 0$ при $i = 0,1, \dots, n$.

Ниже на рис. 12.4 приведены давления после множества итераций для четверти элемента симметрии. На 50-ой итерации при фиксированных значениях давлений рядом со скважиной первые 4 знака уже не менялись, тогда как введение поправки θ и сведение к однородной схеме для соседних со скважиной узлов делало процесс итераций медленно сходящимся и порой непонятным.

Начальные значения для итераций:

					0					
				0,06	0,05	0				
			0,2	0,1	0,08	0,03	0			
		0,4	0,2	0,12	0,1	0,05	0,02	0		
	0,6	0,5	0,3	0,2	0,12	0,06	0,03	0,01	0	
1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0

72-я итерация для однородной схемы с поправкой:

					0					
				0,0478	**0,0231**	**0**				
			0,0998	**0,0712**	**0,0448**	**0,0204**	**0**			
		0,1635	**0,1261**	**0,0929**	**0,0622**	**0,0368**	**0,0156**	**0**		
	0,2604	**0,1980**	**0,1488**	**0,1075**	**0,0748**	**0,0470**	**0,0256**	**0,0097**	**0**	
1	**0,3197**	**0,2199**	**0,1577**	**0,1141**	**0,0786**	**0,0510**	**0,0288**	**0,0130**	**0,0033**	**0**

50-я итерация для фиксированных давлений в узлах вблизи скважин.

					0					
				0,0942	0,0455	0				
			0,2026	0,1429	0,0879	0,0397	0			
		0,3481	0,2625	0,1871	0,1235	0,0711	0,0300	0		
	0,6	0,4338	0,3122	0,2198	0,1478	0,0915	0,0487	0,0183	0	
1	0,7	0,4751	0,3329	0,2322	0,1566	0,0986	0,0551	0,0244	0,0061	0

Рис. 12.4. Итерации, сосчитанные введением поправок и фиксацией значений пластовых давлений в соседних со скважиной узлах.

Как видим, результаты распределения давлений получились разными, введение поправок в узле-скважине и соседних с ними узлов оказалось «скользким» делом. Проще и надёжнее вблизи скважин заранее вычислять и фиксировать давления, ввести, помимо внешних, и внутренние границы разностной сетки, с постоянными значениями давлений. Тогда метод итераций приведёт к правдоподобному решению.

Лекция 13

Нестационарная фильтрация слабо сжимаемой жидкости в упругой пористой среде.

Вывод уравнения для пластового давления в нестационарных условиях фильтрации слабо сжимаемой жидкости. Пьезопроводность пласта. Осесимметричный случай. Автомодельная постановка задачи. Решение нестационарной осесимметричной задачи об отборе нефти единичной скважиной из бесконечного по протяжённости однородного нефтяного пласта. Развитие фильтрационного течения, движение изобар.

Сжимаемость.

Под сжимаемостью понимают свойство изменения объёма при изменении пластового давления. Капельные жидкости как вода, спирт, нефть и т.п. слабо сжимаемы, т.е. даже при значительном увеличении давления относительное уменьшение объёма весьма мало. В лабораторных условиях удобнее иметь дело с плотностью жидкости, массой в единице объёма. Уменьшение объёма с ростом давления означает, что плотность растет с ростом давления. Сжимаемость жидкости и сжимаемость порового пространства определяют соответственно как

$$\beta_{ж} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}, \quad \beta_m = \frac{1}{m}\frac{dm}{dp}. \qquad (13.1)$$

Здесь плотность ρ жидкости рассматривается как функция пластового давления. Конечно, плотность зависит и от температуры, но она участвует как параметр. Размерность β обратна размерности давления. В справочниках можно найти таблицы β для различных жидкостей при разных температурах и давлениях.

Нас будет интересовать сжимаемость воды, нефти, горных пород и порового пространства. Поскольку рассматриваются процессы в природных пластах, то и давления и температуру берут соответствующие этим условиям. На глубинах от 3000 до 5000 м температуры составляют от 100 до 160°С, а пластовые давления имеют значения от 20 до 50 МПа. Соответственно и лаборатории стараются воспроизвести замеры в этих пределах.

К примеру, при температуре 130°С и давлении 30 МПа сжимаемость морской воды составляет $6 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$; сжимаемость пластовой нефти $24 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$; сжимаемость горной породы-песчаника $-1.3 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$; сжимаемость порового пространства песчаника $12 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$.

Малые значения сжимаемости позволяют ограничиться линейной зависимостью и вместо (13.1) пользоваться более привычными из школьного курса линейными представлениями плотности жидкости, пород и пористости от пластового давления при фиксированной температуре

$$\rho = \rho_0[1 + \beta_ж(p - p_0)],\ m = m_0[1 + \beta_m(p - p_0)]. \qquad (13.2)$$

Обращаем внимание читателя, что автор предпочитает вводить сжимаемость пустотного пространства β_m. Так удобнее для выкладок и использования экспериментальных данных. Для произведения $m\rho$, которое входит в уравнение сохранения массы, можно принять, пренебрегая членами второго порядка малости, формулу

$$m\rho = m_0\rho_0[1 + (\beta_ж + \beta_m)(p - p_0)]. \qquad (13.3)$$

Формула показывает, что вместимость массы жидкости в поровом пространстве зависит от сжимаемости жидкости и сжимаемости порового пространства. Они складываются и составляют величины одного порядка. При добыче нефти из пласта отбор жидкости приводит к временному уменьшению содержащейся в поровом пространстве массы, что согласно (13.3) должно приводить к снижению пластового давления. В это снижение вносят свой вклад, как сжимаемость жидкости, так и деформации горных пород: со снижением пластового давления скелет горной породы испытывает расширение и частично компенсирует отбор и способствует смягчению снижения пластового давления.

Рассматривая нестационарные процессы изменения давления, приходится считаться и с возможностью деформации скелета пород пластовых коллекторов и соответствующем влиянии деформации пород на их поровый объём. Вопросам этим посвящено большое число статей и ряд монографий. Есть математические теории, которые связывают объемные деформации пористых материалов заданной структуры с пластовым и горным давлением на скелет породы (при задании модуля упругости и коэффициента Пуассона породы).

Вывод нестационарного уравнения для пластового давления.

Для пространственной фильтрации и в нестационарных условиях по трём независимым направлениям принимают закон Дарси в том же виде

$$(u,v,w)=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad (13.4)$$

Закон сохранения массы фильтрующейся жидкости нами ранее был получен в таком виде

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0 \qquad (13.5)$$

Подставив сюда выражения скоростей (13.4) получим нелинейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad (13.6)$$

Здесь в левой части произведение $m\rho$ можно заменить по формуле (13.3). Тогда частная производная выражается как производная пластового давления по времени с некоторым множителем

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}=\rho_0 m_0\cdot(\beta_{ж}+\beta_m)\cdot\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (13.7)$$

Правую часть уравнения (13.6) также преобразовываем. Плотность жидкости принимаем постоянной и равной ρ_0, учитывая её малую сжимаемость. Тогда в левой и правой части плотности сокращаются. В левой части вместо m_0 оставляем m, делая того же порядка погрешность. Уравнение нестационарной фильтрации в пористой среде неоднородной проницаемости принимает вид

$$m(\beta_{ж}+\beta_m)\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad (13.8)$$

Если же поровая среда однородна и вязкость μ от давления не зависит, то уравнение (13.8) приводится к известному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right),\quad \kappa=\frac{k}{\mu m(\beta_{ж}+\beta_m)}. \qquad (13.9)$$

Его в теории фильтрации принято называть уравнением пьезопроводности. Греческой буквой «каппа» обозначается пьезопроводность. Значения этой константы по размерности

совпадает с температуропроводностью, однако её значения несравненно больше. К примеру, для проницаемости 0.1 мкм² и пористости 20%, при $\beta_ж=25\cdot10^{-4}$ и $\beta_m=15\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$ и $\mu=$ 0.5 мПа·с получаем значение для пьезопроводности $\kappa=0.25$ м²/с. Характерные значения пьезопроводности для нефтяных пластов располагаются в интервале от 0.1 до 1 м²/с.

Уравнение (13.9) применяется при рассмотрении переходных режимов в теории фильтрации. Наибольшую популярность оно приобрело в связи с его применением для определения параметров пласта по кривым восстановления давления в добывающих и нагнетательных скважинах.

Осесимметричная постановка автомодельной задачи.

Рассмотрим слоистое двумерное нестационарное фильтрационное течение в однородном бесконечном пласте, обусловленное вскрытием одной единственной скважины. Очевидно, все направления течения к скважине равноправны и течение будет осесимметричным и направленным к забою скважины. Уравнение (13.9) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right),\quad \kappa=\frac{k}{\mu m\left(\beta_{ж}+\beta_m\right)},\quad r>R_c,\quad t>0\ . \qquad (13.10)$$

Многие решённые в теории теплопроводности задачи с изменением терминов могут быть перенесены в теорию нестационарной фильтрации. Такого рода задачи мы не будем рассматривать. Приведём здесь специфическое решение, для чего незаметно изменим саму постановку. Избавимся для начала от размерного параметра – радиуса скважины. Будем полагать, что решение ищется в области $r>0$, и граничное условие зададим пределом при $r\to 0$. Если задаваться дебитом введённой при $t=0$ в разработку скважины, то предельный переход будет означать принятие предположения о равенстве переменной своему пределу

$$\frac{2\pi R_c kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=R_c}=-Q\approx\lim_{r\to0}\left(2\pi r\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right). \qquad (13.11)$$

Такая замена убирает из задачи единственный линейный параметр и делает возможным сведение уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Рассуждаем следующим образом: давление должно выражаться через математическую функцию, зависящую от

безразмерных аргументов или безразмерных параметров. Судя по (13.11), изменение давления пропорционально дебиту. При математической функции, определяющей значение давления, должен присутствовать множитель размерности давления, пропорциональный дебиту. Безразмерный аргумент этой функции, поскольку не осталось линейных величин, может быть комбинацией линейной координаты r с текущим значением времени. Такую комбинацию можно составить лишь вместе с пьезопроводностью. Для удобства последующих выкладок аргумент пишут в виде

$$\eta = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}. \qquad (13.12)$$

Рассмотрим значения аргумента η. Пусть $r \to +\infty$ или $t \to 0$. Для всех ограниченных $t > 0$ получим $\eta \to \infty$. Эту же бесконечность получим и для $t \to 0$ при всех ограниченных $r > 0$. Так начальное условие объединяется с условием на бесконечности, что физически оправдано, возмущения не доходят до бесконечности. Естественно искать решение (13. 10) в виде суммы начального значения давления и функции $f(\eta)$, взятого с некоторым множителем A, которого будем находить по предельному граничному условию (13.12). Итак, решение ищем в виде

$$p(r,t) = p_0 + Af(\eta). \qquad (13.13)$$

При такой записи условия $r = \infty$ и $t = 0$ соответствуют одному условию $\eta = \infty$, поэтому принятие условия $f(\infty) = 0$ означает, что $p(\infty, t) = p(r, 0) = p_0$. Второе условие на функцию $f(\eta)$ получим из (13.11) подстановкой

$$\lim_{\eta \to 0} A\eta f'(\eta) = -\frac{\mu Q}{2\pi k h}. \qquad (13.14)$$

Это граничное условие определит нам значение неизвестной константы A. Подставим искомое решение в уравнение (13.10). Достаточно подставить $f(\eta)$, ибо константа A в обеих частях уравнения сократится. Вычисляем производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2t}\eta f';$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\eta f') = \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}(\eta f')' = \frac{1}{2r\sqrt{\kappa t}}(\eta f')'. \qquad (13.15)$$

Подстановка в (13.10) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$-\eta f' = \frac{\kappa \cdot 2t}{2r\sqrt{\kappa t}}(\eta f')'; \quad \textit{или} \quad \frac{d}{d\eta}(\eta f') + 2\eta(\eta f') = 0. \qquad (13.16)$$

Видно, что последнее уравнение интегрируется, $\eta f'$ легко находится

$$\frac{d(\eta f')}{(\eta f')} + 2\eta d\eta = 0; \quad \ln(\eta f') + \eta^2 = \ln C; \quad \eta f' = Ce^{-\eta^2} \qquad (13.17)$$

Значение произвольной постоянной интегрирования C находится из граничного условия при $\eta \to 0$. Оно объединяется с неизвестной искомой постоянной A. Поэтому можно принять C=1. Неизвестное значение A найдётся из равенства

$$A = -\frac{\mu Q}{2\pi kh}. \qquad (13.18)$$

Итак, решение найдено в квадратурах и оно представимо в виде

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh} f(\eta), \quad f(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}. \qquad (13.19)$$

Изменение знака обусловлено переменой пределов интеграции для $f(\eta)$. В случае добывающей скважины дебит отрицателен, давление снижается. Закон снижения давления на забое получим, если в это решение подставить $r = R_c$. Поскольку пакет Mathcad позволяет легко вычислить функцию $f(\eta)$, то надобность сводить решение (13.19) к табулированным функциям отпадает. Ниже приведён график функции $f(\eta)$.

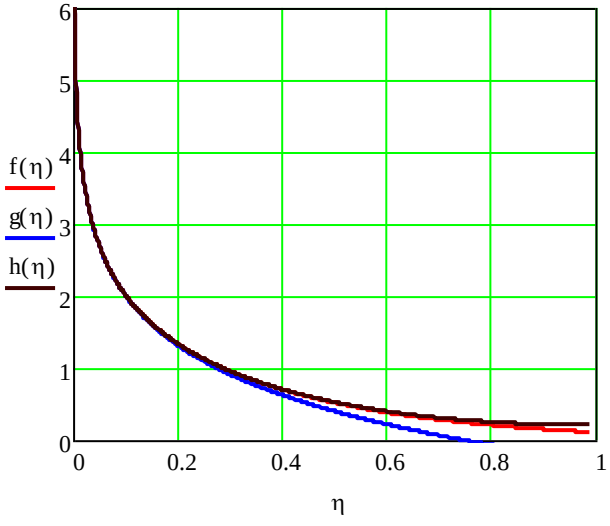


Рис. 13.1. График функции f(η), его инженерного приближения g(η), применимого для $0 < \eta < 0.3$, и первого приближения h(η), пригодного для $0 < \eta < 0.7$.

График показывает, что при фиксированном значении времени функция $f(\eta)$ довольно быстро сходит к нулю с ростом расстояния от скважины. Вблизи скважины при малых расстояниях от оси скважины эта функция может иметь

довольно большие значения. Ниже даны некоторые из её значений.

η	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(\eta)$	4.317	3.624	2.708	2.019	1.341	0.705	0.387	0.210	0.110

Отметим, что функция $f(\eta)$ может быть выражена через стандартную интегральную показательную функцию $E_1(x)$, как показывает выкладка

$$f(\eta)=\int_{\eta}^{\infty}\frac{1}{\eta}e^{-\eta^2}d\eta=\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\infty}\frac{1}{\eta^2}e^{-\eta^2}d\eta^2=\frac{1}{2}\int_{\eta^2}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx=\frac{1}{2}E_1\left(\eta^2\right). \qquad (13.20)$$

Можно выписать асимптотики для малых и больших значений аргумента η. Вблизи нуля будем иметь логарифмическое поведение. Инженерное и первое приближения асимптотик имеют вид: $g(\eta)=-0.2886-\ln\eta$, $h(\eta)=g(\eta)+\eta/2$. Они изображены на рис. 13.1.

Движение изобар по пласту.

Решение (13.19) позволяет найти, как, по какому закону движения, будет двигаться по пласту заданное значение давления. Для добывающей скважины это давление должно быть меньше первоначального пластового, для нагнетательной скважины – выше начального пластового. Если фиксированное значение давления обозначить p_*, то согласно решению (13.19)

$$f\left(\eta\right)=\frac{2\pi kh}{\mu Q}\left(p_*-p_0\right)=f_* \qquad (13.21)$$

Значению f_* функции $f(\eta)$ соответствует некоторое значение аргумента $\eta=\eta_*$, и, согласно найденному решению (13.19), находим закон движения выбранного значения давления p_* по всем радиальным направлениям пласта

$$r=2\eta_*\sqrt{\kappa t},\quad \frac{dr}{dt}=\eta_*\sqrt{\frac{\kappa}{t}}=\frac{2\kappa\eta_*^2}{r} \qquad (13.22)$$

Следовательно, все изобары начинают своё движение из точки $r=0$ одновременно. Они все движутся по пласту по концентрическим кругам, радиусы которых растут согласно закону квадратного корня из времени. Скорость движения всех изобар падает обратно пропорционально квадратному корню из времени или пройденному изобарой пути.

Приведём небольшой пример. Пусть нефтяной пласт с первоначальным пластовым давлением в 30 МПа и мощности 10 м вскрыт единичной скважиной на всю мощность и эксплуатируется в фонтанном технологическом режиме с

дебитом 100 кубометров в сутки. Лабораторными измерениями установлены значения проницаемости по кернам 10^{-13} м² и динамической вязкости пластовой нефти в 1 мПа·с. Требуется найти законы движения трёх изобар: 29.99; 29.9 и 29 МПа.

Найдём из (13.21) соответствующие значения f_1, f_2, f_3 . Разность давлений отрицательна и составляет -0.01; -0.1 и -1 МПа. Для добывающей скважины дебит равен -100 м³/сутки. Подставляя в (13.21) значения в системе СИ, получаем безразмерные величины: $f_1 = 0{,}0543,\ f_2 = 0{,}543,\ f_3 = 5{,}43$. Соответствующие им значения аргумента составят $\eta_1 = 1.202, \eta_2 = 0.481, \eta_3 = 0.00328$. Законы движения этих изобар можно представить через произведение пьезопроводности и времени

$$r_1(t) = 2{,}404\sqrt{\kappa t},\quad r_2(t) = 0{,}481\sqrt{\kappa t},\quad r_3(t) = 0{,}0066\sqrt{\kappa t} \qquad (13.23)$$

Из формул видно, что во времени сохраняется отношение радиусов изобар $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 0.2 : 0{,}00275$. Обычные значения пьезопроводности порядка 1 м²/с, или 86400 м²/сутки. Через сутки первая изобара со снижением давления в сотую долю МПа пройдёт от скважины расстояние 707 м, вторая изобара – 141 м, а третья изобара со снижением давления в 1 МПа пройдёт чуть менее 2 м, 194 см от оси.

Асимптотика решения.

Пример показывает, что наличие параметров проницаемости пористой среды, дебита скважины и мощности пласта, изменяющихся в широком диапазоне данных, способствуют тому, что для функции $f(\eta)$ часто приходится употреблять те значения, которые не отражены на графике 11.1. Автор рекомендует обращаться к пакету Mathcad, которого инженер может воспринимать как современный калькулятор. Процедуры этого пакета позволяют легко справляться с инженерными проблемами вычислительного характера. Можно и с успехом пользоваться известным асимптотическим разложением интегральной показательной функции

$$E_1(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!},\quad \gamma = 0.57721. \qquad (13.24)$$

В теории фильтрации обычно времена большие и аргумент *x,* как правило, мал. В асимптотике (13.24) оказывается достаточным удержание двух первых членов, а сумма может быть отброшена. Формулу пластового давления

упрощают, заменяя точное выражение $f(\eta)$ асимптотическим его приближением

$$f(\eta)=\frac{1}{2}E_1(\eta^2)\approx\frac{1}{2}\left(-\gamma-\ln\frac{r^2}{4\kappa t}\right)=\ln\frac{2\sqrt{\kappa t}}{re^{-\gamma/2}}=\ln\frac{1.5\sqrt{\kappa t}}{r} \qquad (13.25)$$

В результате такой замены формула для распространения пластового давления становится простой и удобной для инженерного использования

$$p(r,t)\approx p_0+\frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{1.5\sqrt{\kappa t}}{r}. \qquad (13.26)$$

Сразу же возникает вопрос, для каких времён можно пользоваться этим асимптотическим выражением? Достаточное условие ответа очевидно из (13.24): при $x \ll 1$ асимптотическое разложение можно ограничить логарифмическим членом. В самом деле, например, при $x < 0{,}1$ будем иметь $-lnx > 2.3$ и всей суммой знакочередующегося ряда (сумма вся меньше первого члена) можно пренебречь. Это значит, что достаточно выполнение условия $t \gg r^2/4\kappa$. Если нам интересны значения давлений на удалении от скважины в 100 метров, то при κ=1 м²/с время должно превосходить 2500 секунд, что менее 1 часа. Для расстояний в 1 км время должно превосходить 2,9 сутки. Применение формулы (13.26) оправдано на больших площадях для времён порядка суток и более. Если же рассматриваются давления вблизи скважины, то упрощённую формулу (13.26) можно применять для вычислений спустя минуты после ввода скважины в эксплуатацию.

Приближение решения (13.26) можно использовать лишь в ограниченной области от радиуса скважины до значения, при котором значение логарифма обращается в нуль. Область $R_c < r < 1.5\sqrt{\kappa t}$ называют возмущённой зоной, вне этой зоны давление сохраняет своё первоначальное значение p_o. Если же пытаться продолжить асимптотическое решение (13.26) за эту область, то будут получены абсурдные значения пластового давления. Как видно из рис. 11.1, инженерное приближение сходится с точным решением до значений η=0.25 и формулу (13.26) можно надежно использовать только до значений $r = 0.5\sqrt{\kappa t}$ ориентировочно. Что касается первого приближения, которого можно представить в виде

$$p(r,t)\approx p_0+\frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[\ln\frac{1{,}5\sqrt{\kappa t}}{r}+\frac{r^2}{8\kappa t}\right], \qquad (13.27)$$

то им можно пользоваться в возмущённой зоне $R_c < r < 1{,}5\sqrt{\kappa t}$ и оценить значение допущенной погрешности.
Лекция 14

О приложениях автомодельного решения

Снижение давления на забое и на условном контуре питания при вводе скважины. Связь перепада давления с поддерживаемым дебитом. Задача восстановления забойного давления по истечению некоторого времени. Определение проницаемости по кривой восстановления забойного давления. Принцип суперпозиции для нестационарных течений в бесконечном пласте. Поле давлений при разновременном вводе скважин. Нестационарный дублет.

Давление на забое скважины.

Этот термин принято употреблять для значения давления у забоя в стволе скважины. Оно должно равняться значению пластового давления при $r = R_c$ на выходе из пласта в скважину. Этим самым мы принимаем границу пласта со скважиной идеальным контактом, что приемлемо для не обсаженной скважины. В случае обсаженной скважины и притока жидкости в ствол через перфорационные отверстия, пластовое давление за колонной и внутри ствола могут различаться. В автомодельном случае задается расход, а перфорационные отверстия считаются расположенными достаточно плотно, так что для нашего случая пластовое давление при $r = R_c$ принимаем за забойное давление.

В предыдущей лекции для пластового давления была получена и обсуждена точная(13.19) и приближённая (13.26) формулы для инженерных расчётов

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh} f(\eta), \quad f(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}; \qquad (14.1)$$

$$p(r,t) \approx p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln \frac{1.5\sqrt{\kappa t}}{r}. \qquad (14.2)$$

Здесь принято $Q > 0$ для нагнетательной скважины, и $Q < 0$ для добывающей скважины. Приближённой формулой (14.2) можно пользоваться для призабойной зоны пласта практически спустя минуты после запуска. Для снижения забойного давления при $r = R_c$, получим

$$p(R_c,t)-p_0 \approx \frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{1.5\sqrt{\kappa t}}{R_c}. \qquad (14.3)$$

Реально снижение пластового давления, и, в частности забойного давления, весьма медленный процесс для больших времён. Например, для характерных значений величин: дебит скважины -100 м³/сутки; вязкость нефти 1 мПа·с; проницаемость пласта 10^{-13} м²; мощность пласта 10 м; радиус скважины 0.1 м; пьезопроводность 1 м²/с снижение забойного давления на моменты времени 10 мин, 1 час, сутки, месяц, год и 10 лет по формуле (14.1) получим соответственно значения: 1.088; 1.253; 1.546; 1.859; 2.088; 2.301 МПа. За те же времена зона снижения пластового давления расширится от скважины на расстояния: 37, 90, 440, 2415, 8366 и 26640 м соответственно.

Размеры простирания нефтяных пластов различны, от нескольких до десятка километров. Для разработки больших залежей бурят сетку скважин, рядную или квадратную. Каждая скважина имеет, как бы свою, область влияния на добычу. Границу этой области называют контуром питания скважины. Расстояния между скважинами порядка 400 м, за область питания принимают круг радиуса 200 м. На такие расстояния возмущения от скважин из-за изменения дебита доходят примерно за сутки. При работе многих скважин возникнет их взаимовлияние и найденное решение непригодно для предсказания пластовых давлений за контуром её питания. Решение (14.3) может быть использовано для переходных процессов при изменении технологических режимов эксплуатации скважин. Разберёмся в вопросе о том, как воспользоваться решением (14.3) для определения параметров пласта по кривой восстановления давления в добывающей скважине.

Кривая восстановления давления.

Так называют кривую, представляющую собой забойное давление во времени после прекращения добычи. Если скважина эксплуатировалась с постоянным дебитом в течение некоторого времени t_1, за это время забойное давление упало до некоторого значения p_1, а затем закрыли приток в скважину, пластовое давление начало перераспределяться, на забое давление станет повышаться, и в принципе для бесконечного пласта может восстановиться до начального своего значения p_0.

Задача состоит в определении закона роста давления, его характерного поведения, чтобы по экспериментальным замеренным точкам давления можно было найти какие либо параметры пласта, например проницаемость.

Нас интересует переходной процесс вблизи скважины и есть надежда, что инженерное решение может дать приемлемый для практики результат. Воспользуемся тем, что уравнение для пластового давления было линейным и для бесконечного пласта сумма двух решений будет снова решением. Процесс включения и выключения одной скважины представим как работу двух скважин, расположенных в одной и той же точке: первая добывает с момента $t = 0$ с дебитом $Q < 0$; вторая закачивает с тем же расходом, но включается в момент $t = t_1$. Тогда сумма решений и даст нужное граничное условие на стенке скважины

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh} f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right), \quad 0 < t < t_1, \quad r > R_c$$

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa (t-t_1)}}\right)\right], \quad t > t_1. \qquad (14.4)$$

Процесс восстановления давления в бесконечном пласте будет определяться второй из этих формул при $r=R_c$. Как было показано ранее, функция f может быть представлена через интегральную показательную функцию E_1, которая, в свою очередь, возле малых значений аргумента может быть заменена инженерным приближением с одним логарифмическим членом типа (14.3). Тогда для восстановления давления на забое получаем выражение

$$p\left(R_c, t\right) = p_0 + \frac{\mu Q}{4\pi kh} \ln \frac{t}{t - t_1}, \qquad (14.5)$$

которым можно пользоваться лишь спустя время, намного большее, чем $R_c^2/4\kappa$ после закрытия притока. При радиусе скважин 0.1 м и пьезопроводности $\kappa \approx 1/4$ м²/с время это составляет секунды. Формулой (14.5)можно пользоваться, спустя минуты после закрытия. Начальной точкой для (14.5) служит значение давления на забое в момент закрытия

$$p_1 = p\left(R_c, t_1\right) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln \frac{1.5\sqrt{\kappa t_1}}{R_c}, \qquad (14.6)$$

В координатах с абсциссой $x = ln[t/(t - t_1)]$ зависимость (14.5) представляет прямую линию. По наклону прямой в замеренных данных можно определить проницаемость пласта, а точка p_1 позволит найти пьезопроводность.

Таким образом, автомодельное решение подсказывает, что параметры пласта могут быть найдены, если удастся снять (записать на прибор) кривую восстановления давления или найти несколько её точек. На полное восстановление начального значения давления требуется примерно 15-20 времён t_1.

Принцип суперпозиции для многих скважин.

Этот принцип предложен для составления решений линейных однородных дифференциальных уравнений в бесконечной области. Любая линейная комбинация двух решений является снова решением. В гидродинамике этот же принцип называют принципом суперпозиции течений и применяют для неограниченных областей. Представим себе бесконечный по протяжённости пласт, в котором эксплуатируются много скважин. Каждая скважина создаёт своё поле течения, они налагаются друг на друга по закону сложения скоростей. Потенциалы скоростей также складываются. Пластовое давление отличается множителем от потенциала скорости и общее изменение давление представит собой сумму изменений давлений, обусловленных скважинами.

Пусть в бесконечном однородном пласте вводятся в добычу в моменты времени $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 <$ скважины с дебитами Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 и т.д. Поле давлений может быть определено цепочкой формул, разных в зависимости от момента времени t и координат расположения скважин:

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right), \quad 0 < t < t_1, \quad r > R_c$$

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + \frac{\mu Q_1}{2\pi kh} f\left(\frac{r_1}{2\sqrt{\kappa (t-t_1)}}\right), \quad t_1 < t < t_2$$

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + \frac{\mu Q_1}{2\pi kh} f\left(\frac{r_1}{2\sqrt{\kappa (t-t_1)}}\right) + \qquad (14.7)$$

$$\frac{\mu Q_2}{2\pi kh} f\left(\frac{r_2}{2\sqrt{\kappa (t-t_2)}}\right), \quad t_2 < t < t_3$$

Здесь r, r_1, r_2, r_3, ... означают расстояния от рассматриваемой точки (x,y) до скважин: нулевой, первой, второй и т.д.

Принцип суперпозиции справедлив как для стационарных течений, так и в нестационарном случае. Причём процесс разновременного включения и отключения скважин также может быть учтён, как выше это уже было продемонстрировано на примере кривой восстановления давления.Если все скважины включаются в момент $t = 0$, то последняя из формул может быть написано сразу для всех $t > 0$.

Нестационарный дублет.

Так называют пару скважин, добывающую и нагнетательную, с одинаковым объёмным дебитом в однородном пласте. Как будет меняться первоначальное поле давлений под действием дублета, введённого в эксплуатацию в момент t=0? Эта задача разрешима с помощью второй из формул приведённого ряда (14.7).

Расположим добывающую скважину с отрицательным дебитом в точке $(a,0)$, а нагнетательную в точке $(-a,0)$. Тогда расстояния r и r_1 можно выразить в декартовых координатах в виде

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}\ . \tag{14.8}$$

Формулу для нестационарного поля давлений представим в виде суммы

$$p(r,t) = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[f\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - f\left(\frac{r_1}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right], \quad t > 0, \quad Q > 0 \tag{14.9}$$

Знаки подобраны так, чтобы нагнетательная скважина имела расход $Q > 0$. Интересно связать перепад давления в нагнетательной и добывающей скважинах с поддерживаемым дебитом. На оси ординат $x = 0$, $r = r_1 = \sqrt{a^2 + y^2}$ и квадратная скобка (14.9) обращается в нуль, т.е. $p(0, y, t) = p_0$. Повышение давления в нагнетательной скважине находим, полагая $r_1 = R_c, r = 2a$. Понижение давления в добывающей скважине находим, полагая $r_1 = 2a, r = R_c$. Тогда получим два следующих равенства

$$p_н = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[f\left(\frac{R_c}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}\right)\right], \quad t > 0$$
$$p_д = p_0 + \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left[f\left(\frac{a}{\sqrt{\kappa t}}\right) - f\left(\frac{R_c}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right] \qquad (14.10)$$

Видно, что добавочный член поменял знак, и разность забойных давлений связан с общим их дебитом зависимостью

$$p_н - p_д = \frac{\mu Q}{\pi kh}\left[f\left(\frac{R_c}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - f\left(\frac{2a}{2\sqrt{\kappa t}}\right)\right] \approx \frac{\mu Q}{\pi kh}\ln\frac{2a}{R_c}. \qquad (14.11)$$

Как было показано выше, можно получить более простые приближённые формулы, используя выражение через интегральную экспоненциальную функцию, но современные средства счёта позволяют так же легко пользоваться точными формулами. На рис. 14.1 показано, как разность давлений сходится к своему стационарному значению с ростом времени. Расстояние между скважинами $2a$=400 м, радиус скважины R_c=0.1 м, пьезопроводность к=0.25 м²/с. Практически на установление ушло время $0.4\cdot10^6$ с=4.6 суток.

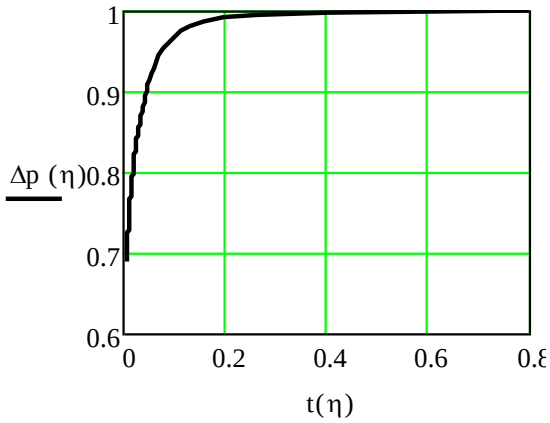


Рис.14.1. Переходной режим установления стационарного значения перепада давления между парой скважин для нестационарного дублета.

Автомодельные решения и их асимптотики находят широкое применение при решении самых разнообразных задач: от поиска и разведки запасов нефти и газа; до проектов разработки и анализа промысловых исследований.

Лекция 15

Не автомодельные задачи упругого режима для одиночной скважины.

Снижение давления в неограниченном однородном пласте при заданном дебите скважины. Метод Лапласа. Сравнение с автомодельным случаем. Снижение пластового давления на забое скважины и на заданном контуре. Получение автомодельного решения методом Лапласа. Режим истощения упругого запаса для конечного пласта.

Ввод одиночной скважины.

В отличие от автомодельной постановки задачи, когда радиус скважины считался нулевым, а дебит сохранялся заданным, теперь сохраним в решении радиус скважины, а дебит будем определять по скорости фильтрации на внешней стенке скважины и считать его постоянным во времени. Пластовое давление на внешней стенке скважины, когда $r = R_c$, меняется во времени, его принимаем за забойное давление.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right), \quad R_c < r < \infty, \quad t > 0 . \tag{15.1}$$

Если задаваться постоянным дебитом введённой в разработку при $t > 0$ скважины, то это будет означать принятие граничных и начальных условий в виде

$$\frac{2\pi R_c kh}{\mu} p_r^{'}\left(R_c, t\right) = Q_0, \quad p\left(\infty, t\right) = p\left(r, 0\right) = p_0 . \tag{15.2}$$

В такой постановке задача не автомодельна, так как не сводится решение к функции от одной переменной и уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению. Здесь для добывающей скважины радиус может быть и большим, дебит обозначаем положительным параметром: $Q_0 > 0$.

Удобно ввести безразмерные переменные в виде

$$p\left(r, t\right) = p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} u\left(\xi, \tau\right), \quad \xi = \frac{r}{R_c}, \quad \tau = \frac{\kappa t}{R_c^2} . \tag{15.3}$$

Тогда все параметры уходят, их роль в решении разгадана, и остаётся задача без параметров, которая раз и навсегда может быть решена или табулирована:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \quad 1 < \xi < \infty, \quad \tau > 0,$$
$$u'_{\xi}(1,\tau) = 1, \quad u(\infty,\tau) = u(\xi,0) = 0. \tag{15.4}$$

Решение данной задачи (15.4) известно, оно может быть получено операционным методом Лапласа [16,17].

Согласно этому методу вводится изображение по Лапласу $U(\xi,s)$ искомой функции $u(\xi,\tau)$ по формуле

$$U(\xi,s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} u(\xi,\tau) d\tau. \tag{15.5}$$

Параметр преобразования s считается положительным, большим некоторого числа, что обеспечивает существование (15.5) для искомой функции, растущей со временем не быстрее экспоненциальной функции. Но при проведении некоторых выкладок и вычислений его приходится полагать и комплексным. В справочной литературе можно найти многочисленные примеры преобразования по Лапласу различного рода функций и обратных преобразований от изображения к оригиналу. Метод Лапласа представляет собой детально разработанную математическую теорию решения линейных дифференциальных уравнений на полуоси.

Интегрируя уравнения и граничные условия (15.4) с экспоненциальным множителем, получаем

$$sU = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{dU}{d\xi}\right), U'_{\xi}(1) = \frac{1}{s}, U(\infty) = 0, 1 \le \xi < \infty. \tag{15.6}$$

Полученное уравнение есть модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка, стандартный вид которого не содержит параметра s при U. Но параметр s удается «спрятать» в аргумент, вводя $\xi\sqrt{s}$. Независимыми решениями его являются I_o и K_o, из которых первое не подходит из-за его экспоненциального роста на бесконечности. Остаётся выбрать решение K_o, которое на бесконечности стремится к нулю. Таким образом, с учётом граничного условия на бесконечности решения уравнения (15.6) будут иметь вид

$$U(\xi,s) = C \cdot K_0\left(\xi\sqrt{s}\right). \tag{15.7}$$

Остаётся подобрать C, так чтобы было выполнено условие на стенке скважины при $\xi = 1$. Получим

$$U'_{\xi}(1) = C \cdot K_1\left(\sqrt{s}\right) \cdot \sqrt{s} = \frac{1}{s}, C = \frac{1}{s\sqrt{s} \cdot K_1\left(\sqrt{s}\right)}. \qquad (15.8)$$

Итак, точное аналитическое решение задачи найдено в изображениях

$$U(\xi, s) = \frac{K_0\left(\xi\sqrt{s}\right)}{s\sqrt{s} \cdot K_1\left(\sqrt{s}\right)}. \qquad (15.9)$$

Входящие сюда функции содержатся в пакете математических программ Mathcad. Для них имеются асимптотики, как для больших, так и для малых значений аргументов, есть таблицы высокой точности.

С практической точки зрения наиболее интересна только асимптотика обращения (15.9) для больших значений времён, которым соответствуют малые значения параметра *s*. Для малых значений *x*

$$K_0(x) \approx \ln\frac{2}{\gamma x}, \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x}, \quad \gamma = 1.781 \quad \ln\gamma = C = 0.5772$$

Изображение по Лапласу $U(\xi,s)$ имеет асимптоту при малых значениях параметра преобразования *s* вида

$$U(\xi, s) \approx \frac{1}{s}\ln\frac{2}{\gamma\xi\sqrt{s}} = \frac{1}{s}\left(\ln\frac{2}{\gamma\xi} - \frac{1}{2}\ln s\right) \qquad (15.10)$$

Соответствующий оригинал асимптотики имеется в таблицах обращения [4], он выражаются в виде

$$u(\xi, \tau) \approx \ln\frac{2\sqrt{\tau}}{\xi\sqrt{\gamma}} \approx \ln\frac{1{,}5\sqrt{\tau}}{\xi} = \ln\frac{1{,}5\sqrt{\kappa t}}{r} \approx u(r, t). \qquad (15.11)$$

Подставляя в (15.3), получаем ту же асимптотическую формулу (11.26), названную инженерным приближением и использованную для анализа поведения забойного давления добывающей скважины с постоянным дебитом $Q_0 > 0$.

$$p(R_c, t) \approx p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh}\ln\frac{1{,}5\sqrt{\kappa t}}{r}. \qquad (15.12)$$

Этим инженерным приближением можно пользоваться для больших времён, когда под знаком логарифма получаются числа, значительно превосходящие 1: при κ=1 м²/с и спустя час числитель дроби под знаком логарифма составит 90 м, и решение может быть использовано до 10-20 м от оси скважины, а спустя сутки – до 50-100 м, месяц же спустя – до 300-400 м.

Чтобы точнее оценить пределы применимости, найдём оригинал для изображения (15.10) и сравним его с асимптотическим приближением (15.11).

Формально оригинал может быть выписан по его изображению (15.9) в виде контурного интеграла по плоскости комплексной переменной s согласно формуле Меллина

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} e^{s\tau}U(\xi,s)\,ds. \qquad (15.13)$$

Для аналитической функции, при некоторых ограничениях в бесконечно удаленной точке, путь интегрирования можно деформировать, оставаясь в области её аналитичности. Заменим контур интегрирования в плоскости переменной $s = \sigma + i\omega,\ -\infty < \omega < \infty, \sigma = \sigma_0 > 0$ двумя берегами разреза вдоль отрицательной полуоси плоскости s, переходящими в окружность произвольного радиуса с центром в начале координат. Начало координат является точкой ветвления логарифмической функции, а так же функции $K_0(x)$, контур интегрирования можно деформировать, не затрагивая отрицательной полуоси. За радиус окружности естественно взять значение $1/\tau$, тогда вся окружность определится формулой

$$s=\frac{1}{\tau}\exp(i\varphi),\quad -\pi<\varphi<\pi,\quad \sqrt{s}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right). \qquad (15.14)$$

Что же касается интегрирования по берегам разреза отрицательной полуоси, то оно должно выполняться лишь по части оси, расположенной вне окружности радиуса $1/\tau$. Здесь заменим $s=\sigma$ на $-\eta^2/\tau$, и тогда пределы изменения η будут от 1 до ∞. Особая точка с нулём будет изолирована.

Для обращения средствами пакета Mathcad следует преобразовать формулу Меллина так, чтобы интегрирование производилось по вещественным переменным η и φ

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1/\tau}+\int_{\square}+\int_{-1/\tau}^{-\infty} e^{s\tau}\frac{K_0\left(\xi\sqrt{s}\right)}{K_1\left(\sqrt{s}\right)}\frac{ds}{s\sqrt{s}}\right\}. \qquad (15.15)$$

Подынтегральное выражение относится ко всем трем записанным интегралам, замена переменной s и квадратного корня от s в этих трех интегралах делаются по разным формулам. Для интеграла - по окружности (15.14). По берегам разреза отрицательной оси параметра s замена производится

по формулам $s=-\eta^2/\tau$, $\sqrt{s}=+i\eta/\sqrt{\tau}$, $\sqrt{s}=-i\eta/\sqrt{\tau}$, со знаками плюс и минус соответственно для верхнего и нижнего берега разреза при вычислении $\sqrt{s}$. Объединяя интегралы по берегам разреза, учитывая свойства сопряжённости аргументов, получаем запись решения в виде квадратур по вещественным переменным η и φ в виде

$$u(\xi,\tau)=\frac{2\sqrt{\tau}}{\pi}\int_1^{\infty}e^{-\eta^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{K_0\left(\xi\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right)}{K_1\left(\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right)}\right)\frac{d\eta}{\eta^2}+\frac{\sqrt{\tau}}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Re}\left(e^{\cos\varphi+i(\sin\varphi-\varphi/2)}\frac{K_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}e^{i\varphi/2}\right)}{K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{i\varphi/2}\right)}\right)d\varphi. \quad (15.16)$$

Применение этой формулы для расчётов в пакете Mathcad дает приемлемые результаты. Для анализа поведения функции давления визуализацией расчётов она довольно практична, хотя и не привычна. Ниже на рисунках представлены графики этой функции при фиксированных значениях одной переменной.

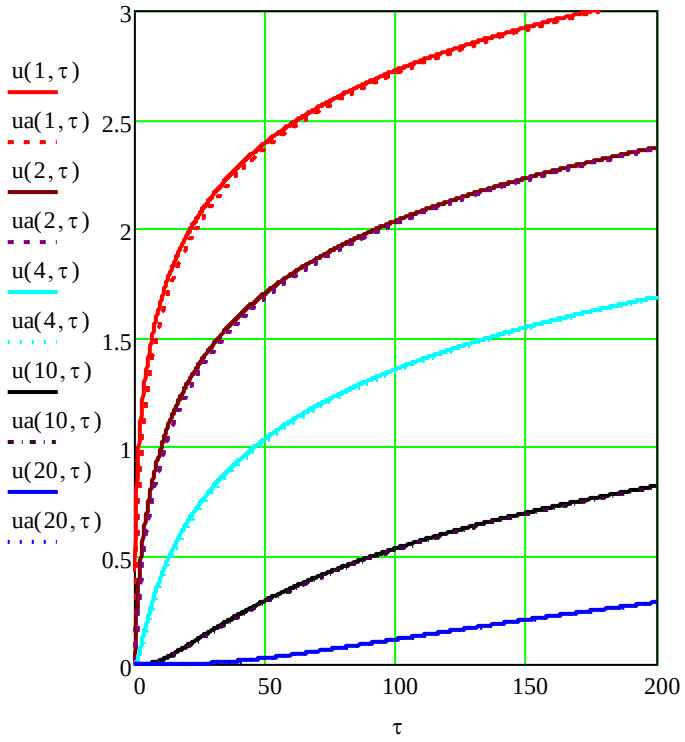


Рис. 15.1. Зависимость функции $u(\xi,\tau)$ от безразмерного времени τ при фиксированных значениях переменной ξ (сплошные линии) и автомодельное решение (пунктиром).

Точное не автомодельное и автомодельное решения хорошо согласуются друг с другом. Для малых значений радиусов разница ещё заметна, а с десяти радиусов скважины кривые практически совпадают.

Распределение пластового давления вдоль радиальной координаты с момента τ>5 для автомодельного решения и не автомодельного случаев так же практически совпали. Этим ещё

раз подтверждено, что всегда следует искать более простые инженерные решения.

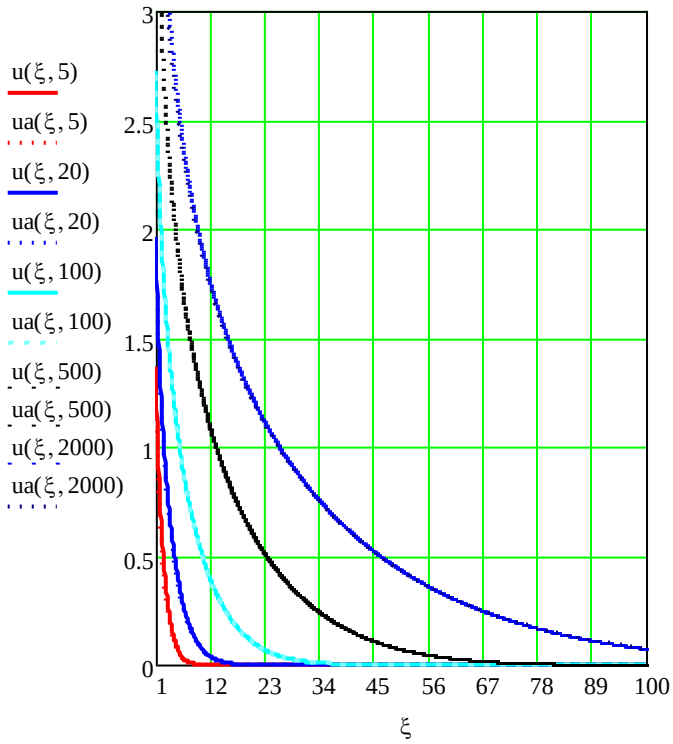


Рис. 15.2. Зависимость функции $u(\xi,\tau)$ от безразмерного радиуса при фиксированных значениях времени (сплошные линии) и автомодельное решение (пунктиром).

Снижение давления на забое и на контуре.

Определим кривую, представляющую собой забойное давление во времени после начала добычи с постоянным дебитом. Если скважина эксплуатировалась с постоянным дебитом в течение некоторого времени t_1, то за это время забойное давление снизится до $p(t_1) = p_1 < p_0$. Кривая снижения представлена на рис. 13.1 функциями: $u(1,\tau)$ для не автомодельного решения; и $ua(1,\tau)$ для автомодельного решения. Видно, что эти кривые хорошо согласуются друг с другом, и наиболее быстрым снижение пластового давления будет на забое скважины.

Если закрыть приток в скважину, пластовое давление начнёт перераспределяться, на забое давление станет повышаться, и в принципе для бесконечного пласта может восстановиться до начального своего значения p_o.

Для изучения переходного режим вблизи скважины использовать новое полученное решение. Воспользуемся тем, что задача (15.4) для пластового давления линейна, и для бесконечного пласта сумма двух решений будет снова решением. Процесс выключения скважины представим как

работу двух скважин, расположенных в одном и том же месте: первая добывает с момента $t = 0$ с дебитом Q_o; вторая закачивает с тем же дебитом, но включается в момент $\tau = \tau_1$. Тогда сумма решений и даст нужное граничное условие на стенке скважины

$$p(r,t) = p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} u(\xi,\tau), \quad 0 < \tau < \tau_1, \quad \xi \geq 1$$
$$p(r,t) = p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh}\left[u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau-\tau_1)\right], \quad \tau > \tau_1. \qquad (15.17)$$

Процесс восстановления давления в скважине будет определяться второй из этих формул при $\xi = 1$. На рис. 15.3 дано поведение для $\tau > \tau_1$ разности $\Delta u(\tau) = u(1,\tau) - u(1,\tau-\tau_1)$. Расчёты показывают, что результаты получаются близкими к автомодельному решению. Поведение пластового давления вдали от скважины, на контуре питания, и для переходных процессов будет определяться теми же формулами при $\xi = \xi_k = r/R_k$.

Метод преобразования Лапласа для автомодельного случая.

Естественно поинтересоваться, можно ли простое автомодельное решение и для других краевых условий получить методом преобразования Лапласа? Ответ очевиден, да! Возникает вопрос о трудоёмкости и надёжности вычислительного процесса при обратном преобразовании Лапласа от изображения к оригиналу.

В автомодельном случае краевое условие ставится при $r \to 0$. Переходить к безразмерному виду здесь не будем, сохраним уравнения и граничные условия в изначальном виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right), \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0,$$
$$\lim_{r\to 0} 2\pi r\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = Q_0, \quad p(r,0) = p(\infty,t) = p_0 \qquad (15.18)$$

Вводим ту же вспомогательную функцию $u(r,t)$

$$p(r,t) = p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} u(r,t). \qquad (15.19)$$

Краевая задача остаётся с одним параметром к, который соединён со временем их произведением. Имеет смысл «упрятать» его, вводя $\tau = \kappa t$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r < \infty, \quad \tau > 0,$$
$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial u}{\partial r} = -1, \quad u(r,0) = u(\infty,\tau) = 0 \qquad (15.20)$$

Применим формулу преобразования Лапласа для функции $u(r,t)$ в виде

$$U(r,s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} u(r,\tau) d\tau \,. \qquad (15.21)$$

Интегрируя (15.20) с множителем экспоненты и с учётом начального условия, легко получить задачу

$$sU = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right), \quad \lim_{r\to 0}(r\frac{dU}{dr}) = -\frac{1}{s}, \quad U(\infty,s) = 0$$

На всей полуоси $0 < r < \infty$ стремящееся к нулю на бесконечности решение представится в виде произведения некоторой константы C на модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка K_o, т.е.

$$U(r,s) = CK_0\left(r\sqrt{s}\right),$$

где константа C найдется из предельного условия в нуле при $r \to 0$. Учитывая, что $K_0'(x) = -K_1(x)$, и асимптотическое поведение для малых значений аргумента $K_1(x) = 1/$, получаем $C = 1/s$. Точное аналитическое решение автомодельной задачи в изображениях есть

$$U(r,s) = \frac{1}{s}K_0\left(r\sqrt{s}\right). \qquad (15.22)$$

Готового обращения для этого изображения нам не удалось обнаружить в существующих таблицах [16,17]. Выпишем формулу для оригинала, аналогичную полученной ранее при заданном радиусе скважины, согласно интегралу Меллина

$$u(r,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} e^{s\tau}\frac{K_0\left(r\sqrt{s}\right)}{s} ds \,. \qquad (15.23)$$

Контур интегрирования меняем, выбираем как разрез с двумя берегами вдоль отрицательной действительной оси, переходящий в круг радиуса $1/\tau$ с центром в начале координат $s = 0$. Интеграл по окружности получим заменой переменной $s = \exp(i\varphi)/\tau$. Тогда ds/s преобразуется в $id\varphi$, и мнимая единица сокращается. Получатся сопряжённые выражения для

отрицательных и положительных углов φ, которые при сложении дадут удвоенную действительную часть функции. Итак,

$$u_o(r,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Re}\left\{e^{e^{i\varphi}}K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}e^{\frac{\varphi}{2}}\right)\right\}d\varphi\,. \qquad (15.24)$$

Это есть часть оригинала, соответствующего вкладу интеграла по окружности. Видно, что время и расстояние объединились в один комплекс. В таком виде интеграл хорошо считаем в пакете Mathcad. Ниже, на рис. 15.3, представлен график u_o от $\omega = r/\sqrt{\tau}$ в логарифмическом масштабе.

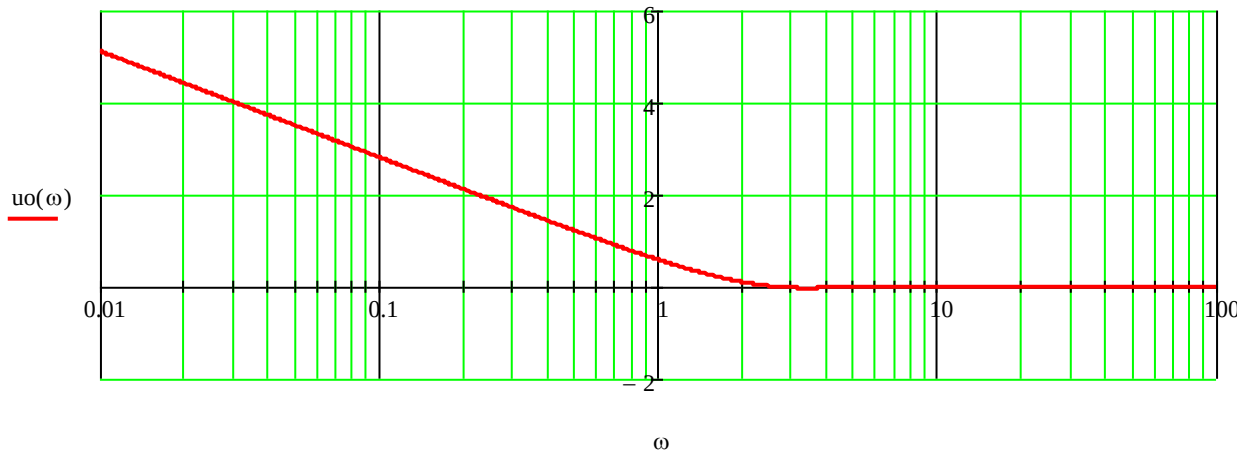


Рис. 15.3. Вклад интеграла по окружности в логарифмическом масштабе от ω.

Преобразуем часть интеграла (15.23) по разрезу вдоль отрицательной полуоси от -∞ до -1/τ. Заменяем s здесь на $-\eta^2/\tau$. Вдоль верхнего берега разреза η следует брать от ∞ до 1, приняв $\sqrt{s}=i\eta/\sqrt{\tau}$, а вдоль нижнего берега разреза – от 1 до ∞, приняв $\sqrt{s}=-i\eta/\sqrt{\tau}$. Переход к интегрированию по η связан с заменой $ds/s=2d\eta/\eta$. По берегам разреза подынтегральная функция имеет сопряжённые значения, с противоположными знаками, сумма их даёт удвоенную мнимую часть.

Контурный интеграл по двум лучам выразится в виде

$$u_l(r,\tau)=-\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}e^{-\eta^2}\,\mathrm{Im}\left\{K_0\left(i\eta\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right)\right\}\frac{d\eta}{\eta}. \qquad (15.25)$$

В такой записи пакет Mathcad справляется с вычислениями. На рис. 15.4 приведен график как функция от комплекса $\omega = r/\sqrt{\tau}$ в логарифмическом масштабе.

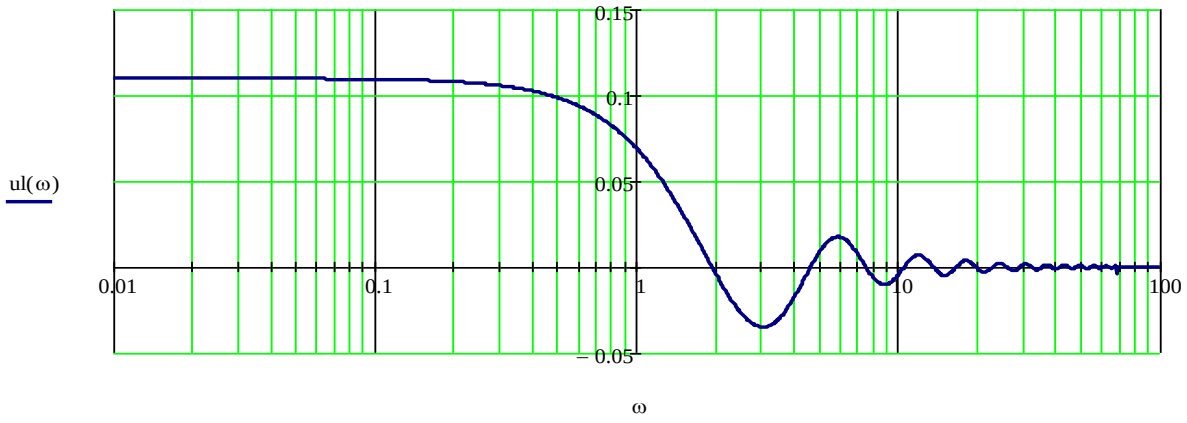


Рис. 15.4. Вклад интегралов по двум берегам разреза.

По рисункам видно, что интегрирование вдоль лучей дает малый прибавок в общую сумму, основное значение приходится на интегрирование по кругу. Для оригинала можно выписать общую формулу в виде суммы (15.24) и (15.25). Результат можно приблизить логарифмическим представлением оригинала

$$u(r,t) = 0,98 \ln \frac{2\sqrt{\kappa t}}{r}, \quad 0,002\sqrt{\kappa t} \le r \le 2\sqrt{\kappa t}\ . \qquad (15.26)$$

За фронт возмущения принято $r = 2\sqrt{\kappa t}$. При логарифме коэффициент получился 0.98, в асимптотике он равен 1. Погрешность расчетов порядка 2%.

Лекция 16

Истощение упругого запаса круговой залежи.

Упругий запас замкнутой нефтяной залежи. Истощение запаса при эксплуатации одной центральной скважиной. О точных постановках задачи и их решении преобразованием по Лапласу. Характерный пример нахождения оригинала по изображению. Снижение давления на контуре и на забое при фиксированном дебите скважины.

Упругий запас.

Под этим термином подразумевают массу нефти, которая может быть извлечена из залежи снижением пластового давления до некоторого заданного значения. Например, если залежь имеет общий объём $10 \times 5 \times 0.02 = 1$ км^3 и пористость 10%, объём пор составит 100 млн. м^3, и весь этот объём может быть занят нефтью и связанной водой. Подвижная часть нефти, без учета связанной воды и остаточной нефти может быть около половины объёма пор. При плотности пластовой нефти 600 кг/м^3 извлекаемые запасы нефти могут быть оценены в 50 млн. тонн. Со снижением пластового давления удельный объём жидкости слабо растёт из-за снижения плотности, растёт и объём породы за счет упругого его расширения.

Извлечённый объём определится как произведение общего объёма пласта на пористость, плотность пластовой нефти, суммарную сжимаемость и разность давлений. Возможную для извлечения в упругом режиме массу нефти можно оценить по формуле $M = \rho V m(\beta_{ж} + \beta_{п})\Delta p$. При суммарной сжимаемости $40 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ и возможном снижении пластового давления на 15 МПа, получаем для упругого запаса 3.6 млн. тонн, что составляет всего 7.2% от извлекаемых запасов нефти. Обычно упругий запас замкнутой залежи мал, его значения не доходят и до 10% геологических запасов. Для нефтяной залежи, содержащей в большом количестве растворённый газ, упругий запас может быть чуть больше. Для термальных вод он существенно меньше из-за малой сжимаемости воды.

Для расчёта процесса истощения залежи обычно применяют приближённые методы: заранее задаются

профилем давления с коэффициентами, зависящими от времени, а коэффициенты определяют из граничных условий и интегральных соотношений для дифференциального уравнения. Задача лекции – показать применение точного аналитического метода.

Метод Лапласа для ограниченной залежи.

Рассмотрим применение метода к случаю круговой залежи, когда в центре круга размещена добывающая скважина. На контуре будем ставить условие отсутствия притока, моделируя этим условием замкнутую залежь. Введём радиус контура R_k , который и определяет характерный линейный размер, так что задача не является автомодельной. Радиусом скважины R_c пренебрегаем, задаёмся отрицательным дебитом $-Q_0$ добывающей скважины, $Q_0 > 0$.

В отличие от автомодельного случая, когда сохраняется приток жидкости внутрь контура, исследуется случай замкнутой залежи, когда нет притока через круговой контур – границу залежи.

Математически задача описывается уравнением пьезопроводности для осесимметричного движения, начальным условием и двумя граничными условиями: заданием дебита и отсутствием притока жидкости в залежь из-за контура

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right), \quad 0 < r < R_k, \quad t > 0,$$

$$2\pi r\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Bigg|_{r\to 0} = Q_0, \frac{\partial p}{\partial r}\Bigg|_{r=R_k} = 0, \; p\left(r,0\right) = p_0 \tag{16.1}$$

Перейдём здесь к безразмерному виду, заменив переменные и искомую функцию по формулам

$$p\left(r,t\right) = p_0 - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh}u\left(\xi,\tau\right), \quad \xi = \frac{r}{R_k}, \tau = \frac{\kappa t}{R_k^2} \tag{16.2}$$

Все параметры задачи при таком преобразовании исчезают, решение становится универсальным для новой введённой вспомогательной функции $u(\xi,\tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right),\quad 0<\xi<1,\quad \tau>0,$$
$$u(\xi,0)=0,\quad u'_{\xi}(1,\tau)=0,\quad \xi u'_{\xi}(\xi,\tau)\big|_{\xi\to 0}\to -1. \qquad (16.3)$$

Решение подобной задачи в более общей постановке, с граничными условиями 3-го рода и заданным конечным радиусом скважины, имеется в [11]. Отличие в нашем случае в том, что рассматривается предельный случай при $R_c\to 0$, в безразмерных переменных задача для функции $u(\xi,\tau)$ не содержит параметров. Решение (16.2) определяет истощение упругого запаса замкнутой круговой залежи при её разработке скважиной, расположенной в центре залежи.

Применим преобразование по Лапласу (13.5) и для изображения получаем краевую задачу для однородного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, решение которого выражается через модифицированные функции Бесселя.

$$sU=\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dU}{d\xi}\right),\quad U'_{\xi}\big|_{\xi=1}=0,\quad \xi U'_{\xi}\big|_{\xi\to 0}\to -\frac{1}{s}. \qquad (16.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения представится линейной комбинацией с двумя произвольными константами интегрирования в виде

$$U(\xi,s)=C_1 I_0\left(\xi\sqrt{s}\right)+C_2 K_0\left(\xi\sqrt{s}\right). \qquad (16.5)$$

Из двух граничных условий определяем две константы, используя свойства модифицированных функций Бесселя: формулы для производных и асимптотическое поведение в нулевой точке

$$I'_0(x)=I_1(x),\quad K'_0(x)=-K_1(x),\quad I_0(0)=1,\quad I_1(0)=0$$
$$K_0(x)\big|_{x\to 0}\approx -\left(\ln\frac{x}{2}+0.5772\right),\quad K_1(x)\big|_{x\to 0}\approx\frac{1}{x}$$

Выкладки показывают, что точное решение для изображения представляется выражением

$$U(\xi,s)=\frac{1}{s}\left\{\frac{K_1\left(\sqrt{s}\right)}{I_1\left(\sqrt{s}\right)}I_0\left(\xi\sqrt{s}\right)+K_0\left(\xi\sqrt{s}\right)\right\}. \qquad (16.6)$$

Для обращения полученного изображения следует знать расположение его особых точек. В нуле особая точка, простые

полюсы расположены по отрицательной действительной полуоси s. Можно снова, как и ранее, выбрать в комплексной плоскости окружность радиуса $1/\tau$ и разрез вдоль отрицательной оси для обеспечения однозначности квадратного корня. Соответственно у оригинала появятся слагаемые для окружности, для разреза и полюсов изображения.

Вдоль окружности $s\tau = exp(i\varphi), -\pi < \varphi < \pi$. Для отрицательных и положительных равных по модулю углов изображение имеет сопряжённые значения, при интегрировании останется вещественная часть, которая одинакова для $\pm\varphi$. Интегрируем только по положительным значениям φ и удваиваем. В результате оригинал будет содержать слагаемым выражение

$$u_o(\xi,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Re}\left\{ e^{e^{i\varphi}} \left[\frac{K_1(\omega)}{I_1(\omega)} I_0(\xi\omega) + K_0(\xi\omega) \right] \right\} d\varphi, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i\frac{\varphi}{2}} \qquad (16.7)$$

Несмотря на громоздкость записи, расчёты по этой формуле практичны в Mathcad. Приводим семейство графиков для некоторых фиксированных значений координаты ξ.

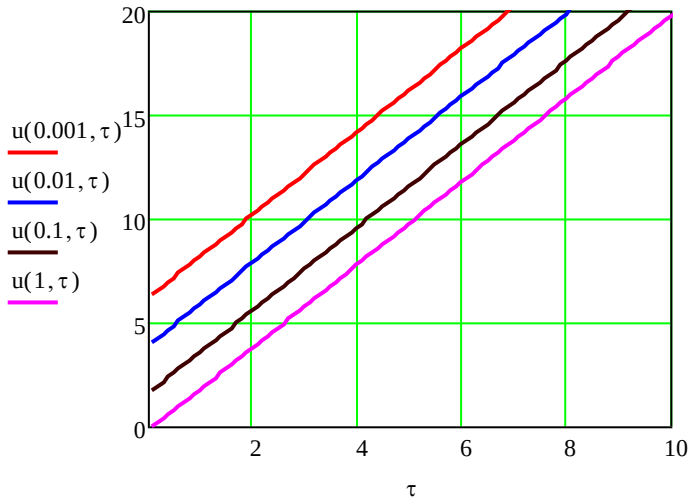


Рис. 16.1. Семейство кривых, указывающих на часть оригинала, соответствующего интегрированию по окружности.

За исключением очень малого начального участка, эта часть оригинала представляет собой линейную функцию, что указывает на почти равномерное снижение давления во времени во всех точках залежи.

Разберёмся с интегрированием по разрезу. Вдоль отрицательной полуоси s расположены полюсы изображения

(16.6), соответствующие нулям $I_1(\sqrt{s})$. При замене s на $-\eta^2/\tau$ значения аргумента становятся чисто мнимыми, а $I_1(ix) = \left(-\frac{\pi}{2} + i\right) J_1(x)$. Корней функции $J_1(x)$ бесконечно много, они все простые, их значения: 3.832; 7.016; 10.153; 13.324; 16.471; и т.д. Расстояния между корнями сходится к значению π. Во всех полюсах вычисляем вычеты и добавляем к интегралам по берегам разреза.

По верхнему берегу разреза следует принять $\sqrt{s} = i\eta/\sqrt{\tau}$, и брать η от 1 до ∞, а по нижнему берегу разреза η убывает от ∞ до 1, причём $\sqrt{s} = -i\eta/\sqrt{\tau}$, и по обоим берегам $ds/s = 2d\eta/\eta$. Подынтегральная функция имеет по берегам сопряжённые значения, но с противоположными знаками из-за смены пределов интегрирования, сумма их даёт удвоенную мнимую часть.

$$ul(\xi,\tau) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty} e^{-\eta^2}\ \mathrm{Im}\left\{\frac{K_1\left(\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right)}{I_1\left(\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right)} I_0\left(\xi\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right) + K_0\left(\xi\frac{i\eta}{\sqrt{\tau}}\right)\right\}\frac{d\eta}{\eta}.$$

Этот интеграл равен нулю. Непосредственное вычисление мнимой части подынтегральной функции дает значения в пределах погрешности, порядка 10^{-15}. На мнимой оси $I_0(ix) = J_o(x)$ имеет только вещественные значения, а мнимая часть дроби постоянна и равна π/2. Поэтому первое слагаемое даст значение $\frac{\pi}{2}J_0(x)$. Но мнимая часть $K_0(ix)$, второго слагаемого, равна этому же значению $-\frac{\pi}{2}J_0(x)$, взятому с противоположным знаком. Поэтому интеграл равен нулю. Остаётся к интегралу по окружности вокруг начала координат $u_0(\xi,\tau)$ добавить только сумму вычетов вокруг простых полюсов β_k изображения (16.6). Вычеты равны значению числителя в полюсах, деленному на производную знаменателя. Получится сумма

$$u_s(\xi,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_k^2\tau}}{\beta_k^2}\left[\frac{Y_1(\beta_k)}{J_0(\beta_k)}J_0(\beta_k\xi) + Y_0(\beta_k\xi)\right]. \qquad (16.8)$$

Этот ряд вносит небольшой вклад в значение оригинала $u(\xi,\tau)$, причём достаточно удержать несколько первых её членов. Ниже на рис. 14.2 показаны графики $u_s(\xi,\tau)$ для всего ряда для достаточно малых τ.

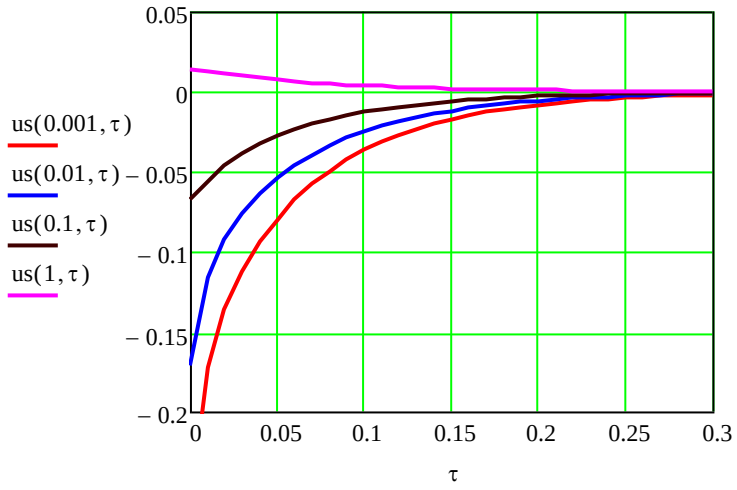


Рис. 16.2. Графики, показывающие значения ряда на различных удалениях от центра круговой залежи $0 < \xi < 1$.

Как видно из графиков, при τ>0.3 всем рядом можно пренебречь, оставив лишь интеграл по окружности. Снижение давления во всех точках круговой залежи с этого момента времени носит одинаковый линейный по времени характер. Что же касается малых времён, то влияние ряда сильнее сказывается для малых расстояний от центра залежи. Для нахождения значений оригинала следует пользоваться формулой

$$u(\xi,\tau) = u_o(\xi,\tau) + u_s(\xi,\tau) \qquad (16.9)$$

Для малых времён $\tau < 0.3$ и фиксированных точек оригинал ведёт себя как линейная функция $\ln\tau$. Для больших значений времён оригинал $u(\xi,\tau)$ ведёт себя как линейная функция безразмерного времени τ. На рис. 16.3 изображены значения оригинала как функции времени для точек $\xi = 1;\ 0.1;\ 0.01$. Показана ещё разность $\Delta u(\tau) = u(0.01,\tau) - u(1,\tau) \approx 4.1$ при $\tau > 0.3$. Для этих значений времён режим истощения носит квазиустановившийся характер: по всей залежи пластовое давление снижается равномерно.

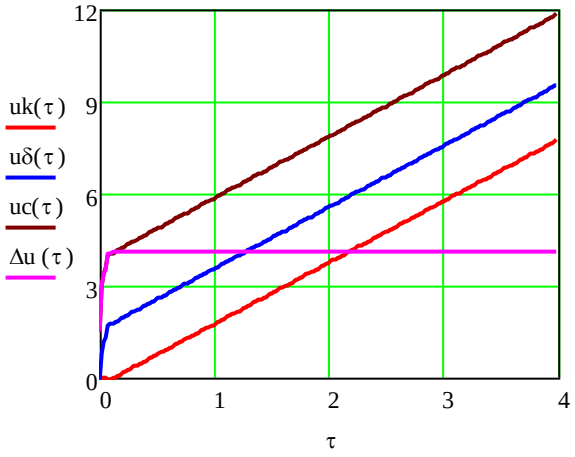


Рис. 16.3. Рост функции $u(\xi,\tau)$ во времени: для контура залежи при ξ=1 (нижняя линия, uk(τ)); на расстоянии ξ=0.1 от центра залежи (средняя линия, uδ(τ)); на расстоянии ξ=0.01 от центра залежи (верхняя линия, uc(τ)). Горизонтальная линия есть разность uc(τ)- uk(τ)=Δu(τ).

Поучительный пример обращения.

Покажем на простом примере как использовать приведённый выше способ обращения. Рассмотрим изображение, содержащее логарифмическую функцию

$$U(s)=\frac{\ln s}{s}.$$

Оригинал этого изображения содержится в таблицах обращения [17]

$$u(\tau)=\ln\frac{1}{\gamma\tau};\quad \ln\gamma=C=0.5772;\quad \gamma=1.781. \qquad (16.10)$$

Проиллюстрируем использование формулы Меллина с рекомендуемым нами контуром интегрирования на этом примере. Согласно формуле обращения

$$u(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau}\,\frac{\ln s}{s}ds$$

Подынтегральная функция имеет лишь особую точку в нуле – это простой полюс, совмещённый с точкой разветвления логарифмической функции. Контур интегрирования можно деформировать, не переходя особую точку, до круга радиуса $1/\tau$ и разреза вдоль отрицательной действительной оси на плоскости комплексной переменной s. Тогда интеграл (16.10) можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$u(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1/\tau} н.б.+\oint окр.+\int_{-1/\tau}^{-\infty} в.б.\right\}.$$

При интегрировании по верхнему и нижнему берегам разреза полагаем $s=-\eta/\tau$. Тогда интегралы можно объединить

$$u_l(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\infty}^{1}\frac{e^{-\eta}}{\eta}\left(\ln\frac{\eta}{\tau}-i\pi\right)d\eta+\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\eta}}{\eta}\left(\ln\frac{\eta}{\tau}+i\pi\right)d\eta\right\}=\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-\eta}}{\eta}d\eta. \quad (16.11)$$

Сумма оказалась числом, она не зависит от значения τ и равна значению интегральной показательной функции $E_1(1)=0.21938$. При интегрировании по окружности радиуса $1/\tau$, полагаем $s=e^{i\varphi}/\tau$, где $-\pi<\varphi<\pi$. В силу сопряжённости значений функции в нижней и верхней полуплоскости s останется лишь удвоенная действительная часть

$$u_o(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{\cos\varphi+i\sin\varphi}\left(\ln\frac{1}{\tau}+i\varphi\right)id\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{Re}\left\{e^{\cos\varphi+i\sin\varphi}\left(\ln\frac{1}{\tau}+i\varphi\right)\right\}d\varphi=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\,\mathrm{Re}\left\{\left[\cos(\sin\varphi)+i\sin(\sin\varphi)\right]\left(\ln\frac{1}{\tau}+i\varphi\right)\right\}d\varphi=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\left\{\cos(\sin\varphi)\cdot\ln\frac{1}{\tau}-\sin(\sin\varphi)\cdot\varphi\right\}d\varphi=$$

$$\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)\,d\varphi\right\}\cdot\ln\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\cdot\varphi d\varphi$$

Теперь видно, что эти интегралы представляют собой числа. В пакете Mathcad их можно вычислить непосредственным набором. Получаются значения

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)\,d\varphi=1,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\cdot\varphi d\varphi=0.79660. \quad (16.12)$$

Складывая интегралы по окружности и берегам разреза, получаем для оригинала изображения

$$u(\tau)=u_o(\tau)+u_l(\tau)=\ln\frac{1}{\tau}-0.57722, \quad (16.13)$$

что совпадает с (16.10).

Пример убеждает в том, что при вычислении по берегам разреза можно фиксировать радиус окружности вокруг нуля, отойти от особой точки, не доводить дело до нахождения вычета в нуле. Смысл в том, что с приближением к нулю логарифм ведёт себя плохо, в особой точке численные методы не обеспечивают достаточной точности. При фиксации радиуса окружности неприятные моменты остаются «за бортом», точность счета обеспечивается лучше. Поведение при малых s второго слагаемого изображения (16.6) таково:

$$\frac{K_0(\xi\sqrt{s})}{s} \approx \frac{1}{s}\ln\frac{2}{\gamma\xi\sqrt{s}} = \frac{1}{s}\ln\frac{2}{\gamma\xi} - \frac{1}{2}\frac{\ln s}{s}, \quad \gamma = 1.781.$$

Видно, что здесь содержится рассмотренный нами оригинал, и для больших времён асимптотика оригинала обращения для этого слагаемого составит

$$\ln\frac{2}{\gamma\xi} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\gamma\tau} = \ln\frac{2\sqrt{\gamma\tau}}{\gamma\xi} = \ln\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\frac{\sqrt{\tau}}{\xi} \approx \ln\frac{1{,}5\sqrt{\tau}}{\xi}.$$

Что же касается всего изображения (16.6) при малых s, то его асимптотическое поведение в нуле таково:

$$\frac{1}{s}\left\{\frac{K_1\left(\sqrt{s}\right)}{I_1\left(\sqrt{s}\right)}I_0\left(\xi\sqrt{s}\right) + K_0\left(\xi\sqrt{s}\right)\right\} \approx \frac{2}{s^2} - \frac{1}{2s\sqrt{s}} - \frac{1}{s}\ln\frac{1}{\gamma\xi} + \frac{\xi^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right).$$

В целом при больших временах асимптотическое поведение функции $u(\xi,\tau)$ определяется суммой [16]

$$u\left(\xi,\tau\right) \approx 2\tau - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \ln\frac{1}{\gamma\xi} + \frac{\xi^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right). \qquad (16.14)$$

В этой формуле первые два слагаемых определяют не зависящее от положения точки снижение пластового давления в залежи, третье слагаемое указывает на логарифмический характер распределения давления, последнее слагаемое показывает отклонение профиля от логарифмического закона.

Лекция 17

Кривые вытеснения нефти водой из пористых сред.

Лабораторные кривые вытеснения. Безводный и водный периоды. Характер обводнения. Схема поршневого вытеснения без учёта силы тяжести. Плотность закачиваемой воды и плотность пластовой нефти. О вытеснении с учётом силы тяжести. Модель вытеснения для пачки капилляров, радиусы которых распределены равномерно на отрезке $[0, R]$. *Общий случай распределения радиусов капилляров. Описание водного периода.*

Кривые вытеснения.

Очищенным песком (или составным образцом) набивают трубку, насыщают её водой, а затем вытесняют моделью нефти (керосином) до полного прекращения извлечения воды. Частично вода в трубке остаётся в капиллярно связанном виде,

и она неподвижна. Доля такого объёма, занятого неподвижной водой, примерно 15-25% от объёма пор. Затем модель нефти снова вытесняют водой и замеряют объём извлекаемой нефти в процессе нагнетания воды и находят отношение извлечённой части к первоначальному объёму нефти. Сначала извлекается чистая «нефть», после закачки объёма воды около половины объёма пор (или менее) происходит прорыв воды, извлекается смесь, и добыча воды в смеси возрастает со временем. Процесс извлечения отображают на графике: по оси абсцисс откладывают объём закачанной воды, отнесённый к поровому объёму трубки, а по оси ординат откладывают объём извлечённой нефти, отнесённый к начальному объёму нефти. Процесс продолжают до полного обводнения извлекаемой смеси, но на практике закачивают не более 10 поровых объёмов воды. На рис. 15.1 изображена характерная кривая вытеснения для залежи фундамента месторождения Белый Тигр.

По оси ординат отложено отношение извлечённого объёма нефти к первоначальному объёму доли нефти. Связанная вода в опыте составила 18.7%. Не вытесненной осталась нефть 31.1% от порового объёма или 38.5% от первоначального значения объёма нефти.

Такого рода кривые являются основными для определения параметров вытеснения: доли связанной воды и доли остаточной нефти в поровом объёме; безводной нефтеотдачи; проницаемости по нефти при связанной нефти и проницаемости по воде при остаточной нефти. Синхронно производятся и замеры давлений на входе и выходе, что позволяет связать перепад давления с процессом вытеснения нефти водой.

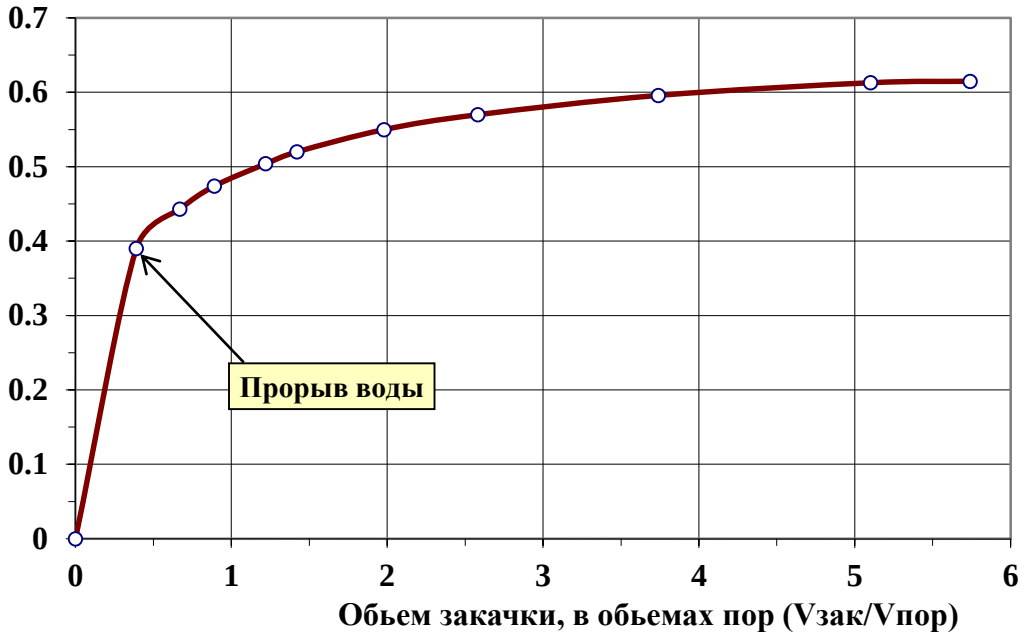


Рис. 17.1. Динамика вытеснения пластовой нефти в зависимости от объемов закачки воды. Трещинные граниты. Фундамент. Белый Тигр. Температура 130°С.

Для экспериментального определения кривых вытеснения в лабораторных условиях обычно пользуются трубками диаметром 3-5 см и длиной 1 м, заполненным пористой средой. Во ВНИИнефти употреблялись и прямоугольные модели витражного типа (Эфрос Д.А.), высотой 30 см, шириной 5 см и длиной 4 м. На них проводились многочисленные опыты по взаимному вытеснению жидкостей, сначала в Москве, а позднее и в Бугульме (ТатНИИ, Фаткуллин А.Х.). Актуальность такого рода прозрачных моделей была связана с разработкой Ромашкинского месторождения, на котором применялось внутриконтурное заводнение пластов. На этих моделях визуально можно было наблюдать за положением фронта вытеснения. Для моделей с малой высотой сечения разница плотностей не играла значительной роли, и гравитационные эффекты (сегрегация, наклон фронта вытеснения), не сказывались.

Расчет поршневого вытеснения в трубке.

Будем полагать вытеснение поршневым, что существует отчётливый фронт вытеснения. Перед фронтом вытеснения движущейся фазой является нефть, вода присутствует в неподвижном связанном виде. За фронтом вытеснения движется только вода, а остаточная нефть неподвижна. Зона

смеси не образуется, есть период безводный, после прорыва фронта продукция полностью обводняется. Течение считается на каждый момент времени установившимся. Требуется написать закон движения по пласту фронта вытеснения для постоянного перепада давления и вывести закон изменения перепада давления при постоянном расходе по трубке.

Введём обозначения: l-длина трубки; S-площадь его поперечного сечения; $x(t)$-положение фронта вытеснения; $q(t)$-расход по трубке, $p_1(t)$-давление на входе; $p_2(t)$-давление на выходе; $p_ф(t)$-давление на фронте; k-коэффициент проницаемости; m-пористость; s_1-доля связанной воды в поровом объёме; $s_{ост}$-доля остаточной нефти в поровом объёме; $s_2=1-s_{ост}$ составит максимальную долю воды в поровом объёме; $k_в$-коэффициент проницаемости по воде при остаточной нефти; $k_н$-коэффициент проницаемости по нефти при связанной доле воды; $\mu_в$ и $\mu_н$ - коэффициенты динамической вязкости воды и нефти.

При вытеснении образуются два однородных участка фильтрационного течения: от входа до фронта и от фронта до выхода. На каждом из них снижение давления происходит по линейному закону, но с разными градиентами. Расход по трубке одинаков. Для каждого из участков закон Дарси можно представить в виде

$$q(t)=S\frac{k_в}{\mu_в}\frac{p_1(t)-p_ф(t)}{x(t)}=S\frac{k_н}{\mu_н}\frac{p_ф(t)-p_2(t)}{l-x(t)}. \qquad (17.1)$$

Движение фронта вытеснения определится по физической скорости частиц жидкости, которая представляет собой отношение расхода $q(t)$ к подвижной доле просветов пор сечения трубки $mS\cdot(1-s_1-s_{ост})=mS\cdot(s_2-s_1)$. Положение фронта можно определить интегрированием по времени

$$x(t)=\frac{1}{mS(s_2-s_1)}\int_0^t q(t)\,dt. \qquad (17.2)$$

Определяя из (17.1) неизвестное значение давления на фронте, находим

$$p_ф=\frac{K(l-x)p_1+xp_2}{K(l-x)+x},\quad K=\frac{k_в}{\mu_в}:\frac{k_н}{\mu_н}. \qquad (17.3)$$

Формула показывает, что давление на фронте вытеснения зависит от параметра K и координаты x. Поскольку профили давлений должны быть отрезками прямых в каждой из зон

(водной и нефтяной), то профиль давления будет состоять из двухзвенной ломаной, пока фронт вытеснения будет внутри трубки. Найдём наклон каждого из звеньев ломаной. Согласно закону Дарси (17.1) наклон (градиент давления) на водном участке равен $\mu_в q/k_в$, а в нефтяной зоне $\mu_н q/k_н$. Их отношение и есть параметр K. Подставив (17.3) в (17.1), получаем связь перепада давления с дебитом в удобном для понимания виде

$$\Delta p = \left\{ \frac{\mu_в}{k_в} x(t) + \frac{\mu_н}{k_н}\left[1 - x(t)\right] \right\} \frac{q}{S} = \left\{ \frac{\mu_н}{k_н} + \left(\frac{\mu_в}{k_в} - \frac{\mu_н}{k_н} \right) x(t) \right\} u . \qquad (17.4)$$

Здесь u – скорость фильтрации. Из формулы видно, что при постоянном расходе q перепад давления Δp будет переменным из-за изменения положения фронта вытеснения $x(t)$. По изменению перепада давления можно судить о том, как меняется сумма в фигурных скобках. При параметре $K<1$ водная зона обладает большим удельным сопротивлением, происходит рост перепада давления. В этом случае эксперимент показывает вытеснение, близкое к поршневому вытеснению. При $K>1$ водная зона обладает меньшим удельным сопротивлением, происходит снижение перепада давления, вытеснение происходит с образованием зоны смеси.

Время вытеснения при постоянном расходе найдётся из формулы (17.2), которая примет вид

$$x(t) = \frac{ut}{m(s_2 - s_1)} . \qquad (17.5)$$

К моменту прорыва $x = l$, что приводит к значению времени прорыва

$$t_{пр} = \frac{ml(s_2 - s_1)}{u} . \qquad (17.6)$$

В схеме поршневого вытеснения после прорыва фильтруется лишь вода, нефть неподвижна. На самом же деле и после прорыва в экспериментах некоторое время, наблюдается ещё вымывание нефти, поршневая схема вытеснения не всегда может быть использована. На наличии зоны смеси влияют не только значение параметра K, но гравитационные и капиллярные силы. Более тяжёлая вода старается занять положение снизу и фронт воды с нефтью занимает наклонное к поперечному сечению положение. Но действие капиллярных сил в гидрофильной среде оказывает противоположное

действие и в низко проницаемых пластах фронт вытеснения занимает почти вертикальное положение.

Оценим влияние гравитационных сил на процесс вытеснение в круглой трубке, расположенной горизонтально. Пусть длина трубки l, радиус трубки R. От этих геометрических размеров и отмеченных выше физических параметров будет зависеть наклон площадки фронта вытеснения к вертикали. Примем гипотезу послойного вытеснения в трубке, будем полагать, что вытеснение происходит поршневым образом по каждой прямолинейной линии тока независимо друг от друга, как по множеству горизонтально расположенных капилляров.

В нижней части трубки перепад давления больше на величину $\Delta\rho g \cdot 2R$, чем в её верхней части, поэтому и скорость фильтрации в нижней части соответственно больше. Прорыв происходит в нижней части, затем захватывает всю большую часть площади, пока вода не прорвётся по верхнему сечению. Можно для длины Δx зоны наклонного на выходе фронта вытеснения получить оценку

$$\frac{\Delta x}{l} = \frac{\Delta\rho g \cdot 2R}{\Delta p} . \qquad (17.7)$$

Здесь: $\Delta\rho$ – разность плотностей воды и нефти; Δp – перепад давления. Зона гравитационного разделения смеси будет незначительной, если перепад давления удовлетворяет условию $\Delta p \gg \Delta\rho g \cdot 2R$, что не является обременительным условием и на практике обычно соблюдается. В промысловых условиях диаметр трубы заменяется мощностью пласта, длина трубы расстоянием между скважинами.

Для промысловых условий гравитационное разделение фаз сказывается на процессе вытеснения, особенно для мощных однородных пластов. Для пластов на глубинах 3000 м и более, температуры нефти и воды превышают 100°С и плотность воды порядка 950 кг/м^3, плотность пластовой нефти примерно 650 кг/м^3. При расстояниях между скважинами порядка 500 м и перепадах пластового давления порядка 1.5 кгс/см^2, зона расслоения фронта вытеснения при мощности 10 м может составить

$$\Delta x = 500 \cdot \frac{300 \cdot 9.8 \cdot 10}{1.5 \cdot 10^5} = 98 \text{ м} .$$

Принятые к эксплуатации программные комплексы всегда предусматривают учёт гравитационного разделения фаз, в

лабораторных условиях они незначительны, и влиянием гравитационных сил пренебрегают.

Модель вытеснения для пачки капилляров разного радиуса.

Будем полагать, что пористая среда состоит из пачки параллельных капилляров, радиусы которых распределены по закону $f(r)$ на отрезке $0 \le r \le R$. По каждому капилляру вытеснение полагаем поршневым. Если водная фаза смачивает стенки капилляра, то параболический профиль скорости по сечению формируется на некотором удалении от фронта вытеснения, который движется со скоростью, равной средней скорости по сечению капилляра

$$u = \frac{r^2}{8\mu_w}\frac{p_1 - p_*}{x_f(r,t)} = \frac{r^2}{8\mu_w}\frac{p_* - p_2}{l - x_f(r,t)}. \qquad (17.8)$$

Каждый капилляр имеет свой фронт вытеснения и своё давление p_* на фронте вытеснения. Исключив p_* из (17.8), получаем для постоянного перепада давлений по капиллярам связь, из которого находим скорость, как функцию от положения фронта вытеснения по капилляру

$$u(r,t) = \frac{r^2}{8}\frac{p_1 - p_2}{\mu_o l - (\mu_o - \mu_w)x_f(r,t)}. \qquad (17.9)$$

Как явствует из формулы, средняя скорость движения по капилляру зависит от радиуса капилляра и положения в нём фронта вытеснения. Однако, положение фронта вытеснения в капилляре связано со средней скоростью движения в данном капилляре, а именно производная по времени фронта вытеснения и есть средняя скорость движения жидкости по капилляру. Эту связь выразим в виде

$$\left[\mu_o l - (\mu_o - \mu_w)x_f\right]\frac{dx_f}{dt} = \frac{r^2}{8}(p_1 - p_2), \quad x_f(r,0) = 0. \qquad (17.10)$$

Интегрируя с нулевым начальным условием, для каждого капилляра имеем

$$\left[\mu_o l x_f - (\mu_o - \mu_w)\frac{x_f^2}{2}\right] = \frac{r^2 t}{8}(p_1 - p_2). \qquad (17.11)$$

Время прорыва воды по каждому капилляру находим из (17.11), полагая $x_f = l$. Получаем функцию, зависящую от радиуса капилляра

$$t_{пр}(r)=\frac{4(\mu_o+\mu_w)l^2}{r^2(p_1-p_2)}\ . \qquad (17.12)$$

Минимальное значение времени прорыва будет иметь самый крупный по радиусу капилляр, прорыв воды по пачке капилляров произойдёт в момет времени $t = t_{\text{пр}}(R)$.

Введём для положения фронта вытеснения по каждому капилляру безразмерную координату $\zeta(r,t)$, отнесённую к общей длине l капилляров. Разрешим ещё квадратное уравнение (17.11) относительно ζ. Положение фронта и среднюю скорость удобно вычислять по формулам

$$\zeta(r,t)=\frac{x_f(r,t)}{l}=\frac{1-\sqrt{1-(1-\mu)\frac{r^2}{4l^2}\frac{p_1-p_2}{\mu_o}t}}{1-\mu},\quad \mu=\frac{\mu_w}{\mu_o}. \qquad (17.13)$$

$$u(r,t)=\begin{cases}\dfrac{r^2(p_1-p_2)}{8\mu_o l\left[1-(1-\mu)\xi(r,t)\right]}, & t\le t_{пр}(r)\\ \dfrac{r^2(p_1-p_2)}{8\mu_w l}, & t>t_{пр}(r)\end{cases} \qquad (17.14)$$

Эти формулы могут быть использованы для получения расчётных кривых вытеснения, по которым можно получить общее представление об оценочных значениях безводного и водного периода: закачке воды, добыче нефти и воды.

Безводный период определяется значениями времён $0 < t < t_{\text{пр}}(R)$. Для этого периода объёмы закачек воды и добычи нефти одинаковы, но расходы по капиллярам пропорциональны четвёртой степени радиуса и зависят от положения фронта вытеснения по капилляру. Чтобы получить общий расход по пачке капилляров, следует проинтегрировать по всем капиллярам с учетом закона распределения их радиусов. Для текущего расхода по всей пачке, очевидно, имеем

$$q_o(t)=\frac{\pi(p_1-p_2)}{8\mu_o l}\int_0^R\frac{r^4 f(r)dr}{1-(1-\mu)\xi(r,t)},\quad q_w(t)=0 \qquad (17.15)$$

При публикации результатов лабораторных экспериментов расходы обычно выражают в поровых объёмах, а не в абсолютных цифрах. Поровый объём для пачки капилляров длины l и распределением радиусов $f(r)$ выразится в виде

$$V_{пор} = \pi l \int_0^R r^2 f(r) dr \,. \qquad (17.16)$$

Для равномерного распределения радиусов $f(r) = 1/R\,, 0 < r < R$ получим $V_{\text{пор}} = \pi l R^2/3$. В случае треугольного закона $f(r) = 2/R \cdot (1 - r/R), 0 < r < R$ поровый объём получается в два раза меньшим, $V_{\text{пор}} = \pi l R^2/6$. Чтобы получить текущий расход (17.15) в поровых объёмах, следует его поделить на поровый объём.

Водный период определяется значениями времён $t > t_{\text{пр}}(R)$. С ростом времени растёт и число капилляров, по которым течёт лишь вода. В каждый момент t найдётся капилляр, по которому по которому произошёл прорыв воды. Из формулы (17.11), полагая $x_f(t) = l$, получаем для радиуса капилляра

$$r_k(t) = 2l\sqrt{\frac{\mu_o + \mu_w}{(p_1 - p_2)t}}, \quad t > t_{пр}(R). \qquad (17.17)$$

Для текущих расходов на выходе интегрированием по капиллярам получим

$$q_o(t) = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\mu_o l} \int_0^{r_k(t)} \frac{r^4 f(r) dr}{1 - (1-\mu)\xi(r,t)},$$
$$q_w(t) = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\mu_w l} \int_{r_k(t)}^{R} r^4 f(r) dr \,. \qquad (17.18)$$

Обводнённость от времени найдётся как отношение

$$\zeta(t) = \frac{q_w(t)}{q_w(t) + q_o(t)}. \qquad (17.19)$$

Интерес представляет и накопленные добычи нефти и воды, которые для водного периода найдутся интегрированием текущих расходов по времени

$$Q_o(t) = Q_{o,*} + \int_{t_*}^{t} q_o(t) dt, \quad Q_w(t) = \int_{t_*}^{t} q_w(t) dt \,. \qquad (17.20)$$

Звёздочками обозначены соответствующие значения на момент прорыва по всей пачке капилляров. Для приведения к безразмерному виду следует поделить на поровый объём пачки капилляров.

На рис. 17.2 и 17.3 изображены кривые накопленной добычи нефти, накопленной добычи воды и обводнённости

продукции в зависимости от закачанного объёма воды в поровых объёмах пачки для отмеченных выше двух законов распределения радиусов капилляров: равномерного и убывающего треугольного распределения радиусов от нуля до некоторого конечного значения 100 мкм. Вязкость воды 0.5 мПа·с, вязкость нефти 2 мПа·с, длины капилляров 1 м, перепад давления 1000 Па.

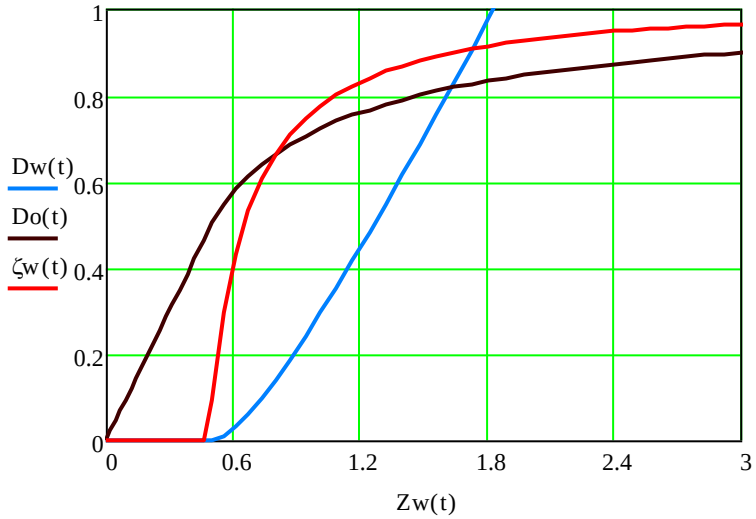


Рис. 17.2. Кривые добычи воды, добычи нефти и обводнённости в зависимости от объёмов закачки воды в поровых объёмах. Радиусы капилляров распределены равномерно от 0 до 100 мкм. Безводная нефтеотдача составила 49.1%. Обводнённость достигла 98% после закачка 4.1 поровых объёмов воды, при этом конечная нефтеотдача составила 92.8%.

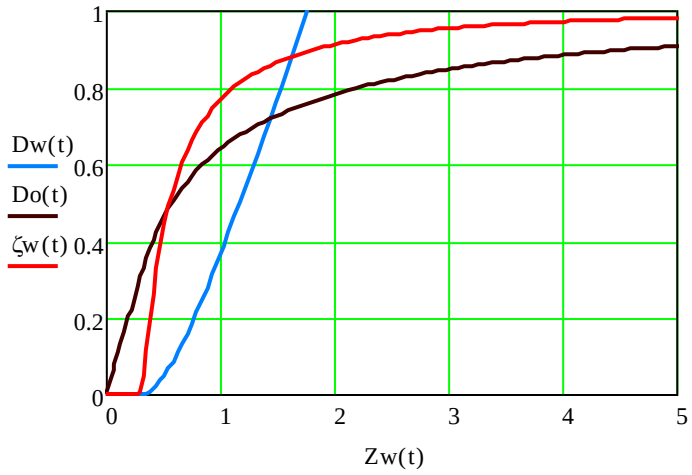


Рис. 17.3. Кривые добычи воды, добычи нефти и обводнённости продукции в зависимости от объёмов закачки воды в поровых объёмах. Радиусы капилляров распределены по убывающему линейному закону от нуля до 100 мкм. Безводная нефтеотдача составила 29.8%. Обводнённость достигла 98% после

закачки 6.4 поровых объёмов воды, конечная нефтеотдача составила 90.7%.
Разница в показателях этих двух вариантов оказалась небольшой.

Лекция 18

Относительные фазовые проницаемости нефти и воды.

Механизм вытеснения нефти водой. Вытеснение и вымывание нефти водой в одной отдельно взятой крупной поре. Связь расходов фаз с водонасыщенностью поры. Действие сил смачивания. Эксперименты на прозрачных моделях и попытки теоретического описания. Обобщение закона Дарси для совместной фильтрации нефти и воды в поровой среде. Недостатки описания. Лабораторные определения относительных фазовых проницаемостей.

Механизм вытеснения нефти водой.

В настоящее время общепринято считать, что вначале происходит вытеснение по более крупным порам, в процессе вымывания нефти вода захватывает всё большее число пор. На процесс вытеснения влияет распределение пор по форме и размерам, смачивание нефтью и водой скелета породы, отношение вязкостей фаз. При полном смачивании водой скелета породы и хорошей взаимосвязи между порами вытеснение в трубке близко к поршневому вытеснению, безводная нефтеотдача близка к конечной отдаче, зона движения смеси нефти и воды относительно мала. При углах смачивания 70° и более нефтеотдача до прорыва воды к выходу трубки относительно мала, порядка 30% и менее. Наша задача состоит в описании закона совместного движения двух фаз (нефти и воды) в пористой среде методами механики сплошной среды. Желательно при этом оставаться в некоторых рамках обобщения закона Дарси. Ранее нами было показано, что закон Дарси для однородной жидкости следует из формулы Пуазейля для расхода вязкой жидкости по круглой трубке. Попытаемся получить аналогичные формулы для расходов смеси нефти и воды, приняв гипотезу о том, что вытеснение в крупной поре происходит сначала по центральной его части, а в последующем нефть вымывается постепенно из кольцевой области из-за действия сил вязкости. При таком рассмотрении смачивание игнорируется, вода остается окружённой нефтяной плёнкой.

Концентрическое течение нефти и воды в круглой поре.

Пусть по круглой трубке радиуса R и длины l установилось течение, при котором вода занимает центральную часть поперечного сечения $0 < r < R_w$, а нефть занимает кольцевую область $R_w < r < R$. Движение обеих фаз происходит под действием одного и того же градиента давления $G > 0$, равного отношению перепада давления к длине поры. Распределение скоростей по поперечному сечению найдётся как решение контактной задачи

$$\begin{gathered}\mu_w \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_w}{dr}\right) = -G, \quad 0 < r < R_w, \quad \left.\frac{du_w}{dr}\right|_{r=0} = 0 \\ \mu_o \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_o}{dr}\right) = -G, \quad R_w < r < R, \quad u_o(R) = 0 \\ u_w(R_w) = u_o(R_w), \quad \mu_w \left.\frac{du_w}{dr}\right|_{r=R_w} = \mu_o \left.\frac{du_o}{dr}\right|_{r=R_w}\end{gathered} \tag{18.1}$$

Здесь индексы w и o означают водную и нефтяную фазы.

Уравнения (18.1) непосредственно интегрируются. Решения можно выписать с одной неизвестной постоянной в виде

$$\begin{gathered}u_w(r) = \frac{G}{4\mu_w}\left(R_*^2 - r^2\right), \quad 0 < r < R_w, \\ u_o(r) = \frac{G}{4\mu_o}\left(R^2 - r^2\right), \quad R_w < r < R.\end{gathered} \tag{18.2}$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям, граничным условиям и равенству касательных напряжений на контакте фаз. Остаётся условие – равенство скоростей фаз на контакте. Потребуем его при $r = R_w$. Обозначим буквой μ без индекса отношение вязкости воды к вязкости нефти. Тогда получим

$$R_*^2 - R_w^2 = \mu\left(R^2 - R_w^2\right), \quad R_*^2 = \mu R^2 + (1-\mu)R_w^2 \tag{18.3}$$

Придадим найденной постоянной более удобный вид, вводя долю воды в общем поровом объёме. Долю воды будем называть водонасыщенностью и условимся обозначать буквой s. В нашем случае для поры

$$s = \frac{\pi R_w^2 l}{\pi R^2 l} = \frac{R_w^2}{R^2}, \quad R_w^2 = R^2 s\,. \tag{18.4}$$

В общем случае для поровой среды водонасыщенность будет определяться как доля воды в поровом объёме рассматриваемой частицы (или ячейки) пласта. Для разных пор насыщенность водой различна. Водонасыщенность малого объёмчика пласта – это осреднённое по всем порам значение.

С учетом формулы (18.4) константа интегрирования R_*^2 принимает вид

$$R_*^2 = \left[\mu + (1-\mu)s\right]R^2. \qquad (18.5)$$

Вычисление расходов производим по соответствующим площадям фаз

$$q_w = \int_0^{R_w} 2\pi r u_w(r)dr = \frac{\pi R^4 G}{8\mu_w}\cdot s\left[2\mu + (1-2\mu)s\right]$$
$$q_o = \int_{R_w}^{R} 2\pi r u_o(r)dr = \frac{\pi R^4 G}{8\mu_o}\cdot (1-s)^2 \cdot \qquad (18.6)$$

По формулам видно, что по сравнению с формулой Пуазейля для однородной жидкости появились множители, учитывающие объёмную долю фазы. Смесь движется с поправками на объёмную долю, причём эти поправки являются функциями водонасыщенности. Принято такого рода функции называть относительными фазовыми проницаемостями. В нашем случае для поры относительные фазовые проницаемости имеют вид

$$k_w(s) = s\left[2\mu + (1-2\mu)s\right], \quad k_o(s) = (1-s)^2. \qquad (18.7)$$

На рис. 18.1 изображены эти графики для трёх значений $\mu = 0.02; 0.1$ и 0.5. Отношение вязкостей отразилось лишь на вытесняющей фазе, для вытесняемой нефти отношение вязкостей не повлияло на относительную фазовую проницаемость. При $\mu > 0.5$ относительная фазовая проницаемость воды становится выпуклой функцией.

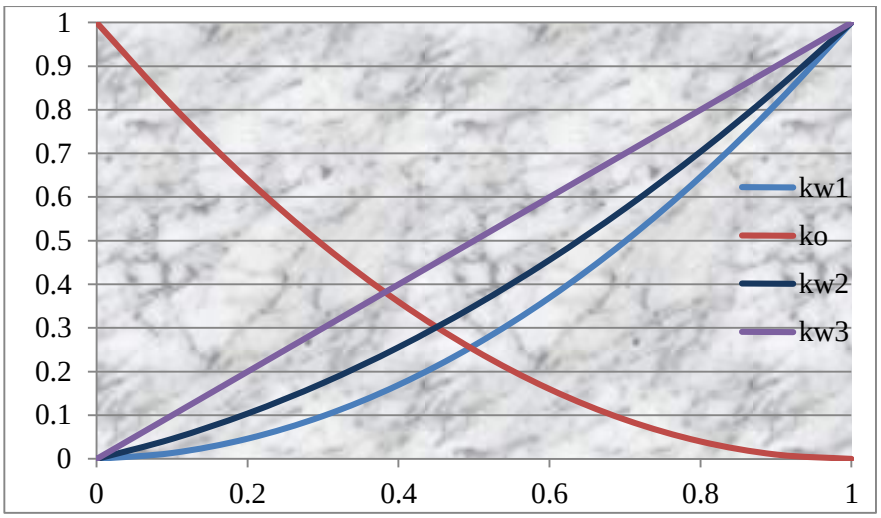


Рис. 18.1. Модельные относительные фазовые проницаемости поры круглого сечения для отношения вязкостей μ=0.02; 0.2 и 0.5.

Совместное течение нефти и воды в единичной трещине.

Аналогичные относительные фазовые проницаемости могут быть получены и для щели постоянной раскрытости для различных схем вытеснения. При постепенном захвате площади трещины водою относительные проницаемости будут пропорциональны насыщенностям фаз, т.е. окажутся линейными. Такая картина может иметь место при высоком смачивании породы водою. При слабом смачивании вода, как и в порах, занимает центральную часть.

Так же как и в случае капилляра предположим, что в трещине постоянной раскрытости $2h$ вода занимает центральную часть $-h_w < y < h_w, h_w < h$, а нефть занимает пристеночные области $h_w < |y| < h$. Профили скоростей фаз имеют параболический вид

$$u_w(y) = -\frac{G}{2\mu_w}\left[(1-\mu)h_w^2 + \mu\left(h^2 - y^2\right)\right],$$

$$u_o(y) = -\frac{G}{2\mu_o}(h^2 - y^2), \quad \mu = \frac{\mu_в}{\mu_н} \qquad (18.8)$$

Постоянные интегрирования здесь подобраны таким образом, что они обеспечивают условия равенства скоростей и касательных напряжений на границе вода-нефть, а также условие равенства скорости нефти на контакте с поверхностью породы.

Интегрированием скорости каждой из фаз по соответствующим пределам изменения координаты y, имеем для расходов фаз по трещине

$$q_w = \frac{kG}{\mu_w}\left[(1-1,5\mu)s^3 + 1,5\mu s\right],$$

$$q_o = \frac{kG}{\mu_o}(1-1.5s+0.5s^3), \quad k = \frac{h^3}{3}, \quad s = \frac{h_w}{h}. \tag{18.9}$$

где k и s есть аналоги абсолютной проницаемости и водонасыщенности для трещины. Из формул следует, что за относительные фазовые проницаемости для трещины следует принять

$$k_w = s^3 + 1.5\mu s(1-s^2), \quad k_o = (1-s)^2(1+0.5s),$$

$$k_w'(0) = 1.5\mu, \quad k_o'(0) = -1.5 \tag{18.10}$$

Снова относительная фазовая проницаемость воды получилась зависящей от отношения вязкостей, тогда как относительная фазовая проницаемость нефти от отношения вязкостей не зависит. Обращаем внимание и на значение производной относительной фазовой проницаемости нефти по насыщенности, которая в обоих случаях оказалась равна нулю. Это означает, что процесс вымывание нефти водой снижается с ростом водонасыщенности. Реально его приходится считать завершённым при значениях водонасыщенности, близких к 0.9.

Если трещина имеет достаточную раскрытость и капиллярные силы невелики, то может сложиться ситуация, когда вода занимает место у одной стенки трещины, а нефть возле другой. Профили скоростей снова имеют параболический вид, выражения для скоростей нефти и воды с учетом и равенства их нулю на стенках трещины, равенства касательных напряжений на контакте вода-нефть можно представить в параболическом виде. Интегрированием вычисляем расходы каждой из фаз и вводим водонасыщенность. Тогда будем иметь ОФП вида

$$k_w(s) = s^2\{s + 3\frac{\mu(1-s)}{s+\mu(1-s)}\}, \quad \mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}$$

$$k_o(s) = (1-s)^2\{1-s+3\frac{s}{s+\mu(1-s)}\} \tag{18.11}$$

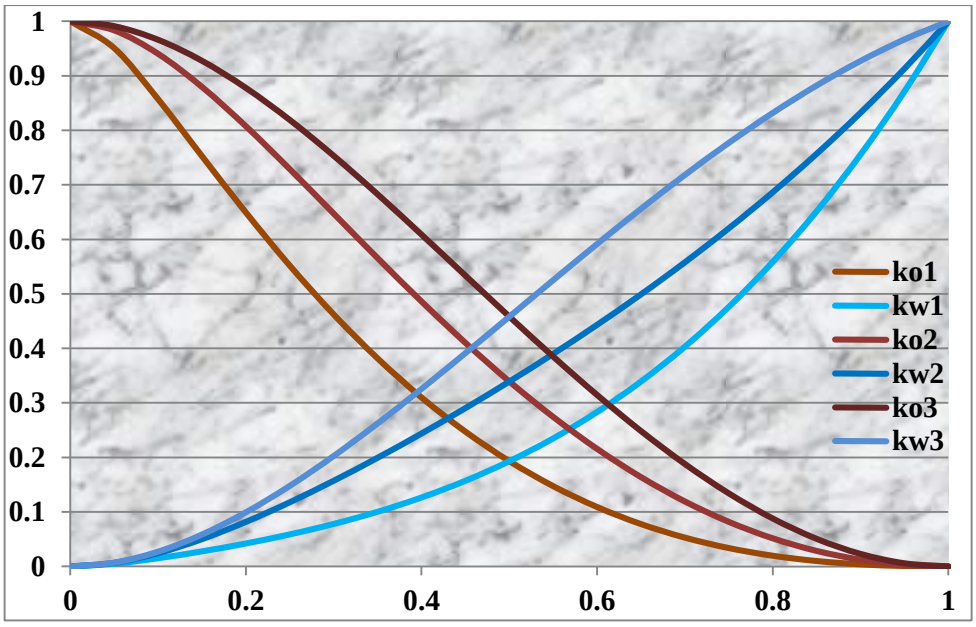


Рис. 16.2. Относительные фазовые проницаемости нефти и воды для трещины, заполняемой водой от одной стенки к другой. С уменьшением отношения вязкости воды к вязкости нефти кривые прижимаются к оси водонасыщенности, т.е. снижаются.

При μ=1 эти фазовые проницаемости обращаются в кубические многочлены $k_w = s^2(3-2s)$, $k_o = (1-s)^2(1+2s)$. На рис. 16.2 показаны графики для μ=0.8; 0.4 и 0.1. Видно, что зависят от отношения вязкостей. Отметим еще значения производных найденных функций в крайних точках $k_w'(0) = 0$ и $k_o'(1) = 0$. Значения производных ограничены всюду числом 3.

Реально в пласте имеем дело не с единичной трещиной, а с большим их множеством и разнообразием, причем ориентация, раскрытость, густота трещин меняется в широких пределах. Трещинные образцы с микронной раскрытостью (до 20 мкм) ведут себя примерно так же, как и пористые тела. Для залежи фундамента, которая пронизана взаимосвязанной с сетью микро- и макротрещин, теоретические относительные фазовые проницаемости годятся скорее для интуиции. Опыт работы показал, что ОФП лучше определять экспериментально на реальных образцах пород из-за их значительного разнообразия.

Совместная фильтрация нефти и воды в пористой среде.

При совместной фильтрации фаз в коллекторе принято пользоваться для каждой отдельной фазы обобщением закона Дарси. А именно, вводятся поправочные множители к абсолютной проницаемости k образца в виде ОФП $k_w(s)$ и $k_o(s)$, зависящие от водонасыщенности s

$$v_w = -\frac{k}{\mu_w} k_w(s) \nabla p, \quad v_o = -\frac{k}{\mu_o} k_o(s) \nabla p \qquad (18.12)$$

Эксперименты по определению ОФП проводят, как правило, для установившегося фильтрационного течения в образце: поддерживают достаточно долго заданные расходы фаз, затем измеряют перепад давления и среднюю насыщенность образца водой. ОФП вычисляют непосредственно по формулам (18.12).

Очевидно, полученные результаты могут считаться справедливыми лишь для установившихся течений с неизменной насыщенностью. Для задач вытеснения нефти водой, когда распределение насыщенности в коллекторе достаточно быстро меняется, использование результатов остается не обоснованным, проблематичным. Предлагалось ОФП определять по экспериментам с вытеснением водой нефти в образце (метод Вельджа) в неустановившемся режиме течения, однако такой подход не получил широкого распространения. В НИПИморнефтегаз («Вьетсовпетро») экспериментальные определения ОФП проводились как для установившихся, так и для неустановившихся режимов течений.

Формулы типа (18.12) общеприняты в настоящее время и для неустановившихся течений. При этом следует иметь в виду, что ОФП можно корректировать. Повторяемость в опытах не всегда имеет место, ОФП зависят не только от водонасыщенности, но и от других характеристик течения ситуативного типа. Поэтому руководящие документы ведомств по разработке нефтяных месторождений предусматривают корректировку ОФП по истории обводнения скважин. Т.е. ОФП в случае необходимости могут быть видоизменены и уточнены.

Есть и другая причина, заставляющая критически относиться к экспериментально полученным относительным фазовым проницаемостям. Их получают на относительно однородном небольшом образце. Образец может оказаться нехарактерным для всей залежи. Размеры образца 6 см × 30 см,

тогда как размеры ячеек модели залежи могут быть до 100 м × 100 м. Ячейки модели могут иметь внутреннюю неоднородную структуру с характерным размером 10 м и более, образец учитывает размеры неоднородности сантиметрового масштаба. При строгом подходе нужно закладывать в численные расчеты для ячеек модели не экспериментально полученные на кернах кривые относительных фазовых проницаемостей, а модифицированные, с учетом крупномасштабных характерных неоднородностей данного месторождения или пласта, так называемые относительные псевдо проницаемости. Последние получаются из экспериментальных кривых пересчетом на большой неоднородный объем как суммарные относительные проницаемости достаточно большого числа малых образцов, проницаемости и пористости которых соответствуют общей статистике распределения для залежи.

Для однородного коллектора, когда экспериментальный образец дает компетентную характеристику его внутренней структуры, экспериментальные кривые фазовых проницаемостей применяют и к большим ячейкам. В случае неоднородной среды следует из малых образцов “лепить” компетентный объем и расчетным путем получать псевдо проницаемости, которые и должны закладываться в модель и подправляться в процессе согласования расчетных показателей вытеснения с фактической историей разработки.

ОФП в основном определяются внутренней структурой трещинно-порового пространства коллектора и капиллярными силами взаимодействия воды, нефти и породы. Во всех случаях для кривых ОФП характерно наличие критических значений каждой из фаз, ниже которой данная фаза становится неподвижной в поровом пространстве. Для воды - это связанная водонасыщенность, для нефти - остаточная нефть. Обозначим: связанную насыщенность водой буквой s_1; максимально возможную при вытеснении водой нефти водонасыщенность через s_2. Остаточная нефть составит $1\text{-}s_2$. Характерными точками фазовых кривых, помимо s_1 и s_2, являются соответствующие им ординаты $A_o = k_o(s_1)$, $A_w = k_w(s_2)$. Сами кривые располагаются, как правило, ниже прямых линий, соединяющих концевые точки. Если фазовые нормализованы по абсолютной проницаемости нефти, то $A_o = 1$ и $A_w < 1$.

Есть в научной литературе попытки дать теоретические объяснения связанной водонасыщенности (вода смачивает породу в условиях залежи фундамента и капиллярно удерживается в тупиковых порах) и остаточной нефти (нарушается связность нефтяной фазы, нефть свертывается в глобулы, которые не проталкиваются водой).

Для смешивающегося вытеснения, когда одна фаза растворяется в другой (например, одна жидкость разных цветов), фазовые проницаемости принимаются прямыми линиями, образующими диагонали квадрата (s_1=0, s_2=1). Для несмешивающегося вытеснения, когда действуют различные углы смачивания фаз и капиллярные силы, s_1>0, s_1<s_2<1. Эти крайние точки более всего влияют на коэффициент извлечения нефти.

В НИПИморнефтегаз было получено достаточно много кривых ОФП с воссозданными кернами фундамента, в том числе и на двухметровой модели. Эксперименты проводились и во ВНИИнефти (г. Москва) на естественных кернах залежи фундамента, причем ОФП получены как для горизонтально расположенного образца, так и при вертикальном его расположении и вытеснении нефти водой в обоих направлениях.

Приведем осредненные по многим образцам залежи фундамента месторождения Белый Тигр для экспериментов ОФП для случая горизонтального вытеснения.

s	0.19	0.40	0.49	0.55	0.62	0.72
k_o	1	0.324	0.145	0.071	0.035	0
k_w	0	0.027	0.044	0.059	0.087	0.160

Они отличаются меньшей проницаемостью воды от широко применявшихся за рубежом ОФП для естественных кернов, рекомендованных Д. Морганом и Д. Гардоном.

s	0.18	0.33	0.4	0.5	0.6	0.7
k_o	0.97	0.33	0.19	0.07	0.02	0
k_w	0	0.06	0.09	0.17	0.28	0.41

Из сравнения видно, что для залежи фундамента ОФП нефти проходит несколько выше, при одной и той же

водонасыщенности нефть фундамента фильтруется легче. В обоих случаях концевые точки ОФП примерно одинаковы. Это свидетельствует о том, что коэффициент извлечения нефти залежи фундамента не хуже, чем для естественных кернов.

Приведём ещё осредненные ОФП нефти и воды, принятые в расчетах вытеснения водой парафинистой нефти (до 20% парафина) XIV-XVII горизонтов месторождения Узень. Обработка экспериментальных кривых позволила аппроксимировать их степенными функциями

$$s_1 = 0.3;\quad s_2 = 0.72;\quad k_w = A_w(s-0.3)^{2.85};\quad k_o = A_o(0.72-s)^{1.95} \qquad (18.13)$$

Конечная нефтеотдача для Узени при линейном вытеснении составила 46%, тогда как для залежи фундамента эксперимент даёт значение около 62%.

Для залежи фундамента в среднем, а также для каждого эксперимента в отдельности делались попытки приблизить кривые ОФП степенными зависимостями типа (18.13). Была составлена специальная программа с обнулением фазовых проницаемостей вне интервала $s_1<s<s_2$ и подбирающая параметры в зависимости от назначенных значений s_1 и s_2 минимизацией среднеквадратичного отклонения. Экспериментальные данные в степенные зависимости укладываются плохо, среднеквадратичное отклонение остается значительным, но для показателей степеней получаются общепринятые значения. Так для $s_1 = 0.19$ и $s_2 = 0.75$ наилучшее согласие с осредненной экспериментальной кривой дают показателей степеней $\alpha_w = 2$; $\alpha_o = 2.5$. По сравнению с показателями для месторождения Узень, вода и нефть в залежи фундамента оказались более подвижны, а нефтеотдача – выше. Это, видимо, объясняется высокими значениями температур в залежи фундамента (порядка 130-160°С), тогда как на Узени они ниже (60-80°С).

Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о том, что ОФП залежи фундамента укладываются в общепринятые нормы, по крайней мере, для экспериментальных образцов; из-за большого разнообразия и малой протяженности трещин фазовые проницаемости залежи фундамента не отличаются существенно от таковых для естественных кернов месторождений.

Удобные аппроксимации ОФП.

В научной литературе предложено много аналитических зависимостей для относительных проницаемостей. Наибольшее распространение получили степенные зависимости вида

$$k_w(s) = A_w(s - s_1)^{\alpha_w}, \quad k_o(s) = A_o(s_2 - s)^{\alpha_o}, \quad s_1 < s < s_2 \qquad (18.14)$$

Неудобство здесь состоит в том, что в концевых точках производные обращаются в нуль, тогда как для экспериментальных кривых они чаще всего отличны от нуля. Такое приближение меняет качественную картину вытеснения, ликвидируя (при α_w>1) зону полного вымывания нефти и возможные переходы к поршневому режиму вытеснения. Качественно картина вытеснения сохранится, если углы наклона кривых ОФП в концевых точках одинаковы с экспериментом. Для ОФП нужно сохранить из эксперимента: концевые точки s_1, s_2; значения в этих конечных точках $k_w(s_2)$ и $k_o(s_1)$; углы в этих конечных точках $k_w'(s_1)$, $k_w'(s_2)$, $k_o'(s_1)$, $k_o'(s_2)$; монотонный рост $k_w(s)$ и монотонное снижение $k_o(s)$.

Всего нужно вложить не менее 8 параметров для обеих кривых, причём $k_w(s_1)=k_o(s_2)=0$. Введем нормализованную водонасыщенность $\boldsymbol{s} = (s-s_1)/(s_2-s_1)$ и избавимся от 2-х параметров, и на каждую кривую остается 4 обязательных параметра, причем один из них известен, обе кривые во всех случаях доходят до оси абсцисс. Если аппроксимировать эти кривые многочленом, то они должны иметь степень не ниже 3, т.е. должны быть кубическими или выше.

Наиболее разумными представляется осреднение результатов экспериментов по кубической параболе, если таковая укладывается внутрь экспериментального “облака” точек. Из всех допустимых кривых кубическая аппроксимация наиболее простая, ей можно придать наглядный вид и ввести параметры, подлежащие определению таким образом, чтобы их значения можно было “прочесть” по экспериментальным кривым. Такие удобные аппроксимации ниже и предложены.

Нормализуем значения насыщенности, отнеся их к интервалу изменения от s_1 к s_2 , и ОФП воды запишем через нормализованную насыщенность $\boldsymbol{s}$ в виде

$$k_w(\mathbf{s}) = A_w\mathbf{s}^2(3-2\mathbf{s}) + B_w\mathbf{s}(1-\mathbf{s})^2 - C_w\mathbf{s}^2(1-\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = \frac{s-s_1}{s_2-s_1}. \qquad (18.15)$$

и установим геометрический смысл каждого из коэффициентов A_w, B_w, C_w. При $s= s_1$ имеем $\mathbf{s}$ =0 и k_w=0. Эта первая концевая

точка. При $s=s_2$ имеем **s** =1, то есть $k_w(s_2)=A_w$. Эта вторая концевая точка, определяющая A_w. Вычислим производную по **s** как производную сложной функции

$$\frac{dk_w}{d\mathbf{s}} = \frac{6\mathrm{A_w}(s - s^2) + \mathrm{B_w}(1\text{-}4\mathbf{s}+3\mathbf{s}^2) - \mathrm{C_w}(2\mathbf{s}\text{-}3\mathbf{s}^2)}{\mathrm{s_2} - s_1} \quad . \qquad (18.16)$$

По её значениям в концевых точках определим коэффициенты $B_w = (s_2 - s_1)k_w'(s_1), \mathrm{C}_w = (s_2 - s_1)k_w'(s_2),\ 0 \le B_w \le 3A_w,\ 0 \le \mathrm{C}_w \le 3A_w$. Из (18.15) заменой **s** на (1-**s**) получим ОФП нефти

$$k_o(\mathbf{s}) = A_o\left(1-\mathbf{s}\right)^2\left(1+2\mathbf{s}\right) + B_o\mathbf{s}^2(1-\mathbf{s}) - C_0\mathbf{s}\left(1-\mathbf{s}\right)^2 . \qquad (18.17)$$

В концевых точках $k_0(0) = A_o,\ k_0(1) = 0$. При нормализации ОФП по проницаемости нефти следует брать $\mathrm{A}_0 = 1$. Вычислим производную ее по водонасыщенности *s* как сложной функции

$$\frac{dk_o}{ds} = \frac{A_o\left(6\mathbf{s}^2 - 6\mathbf{s}\right) + B_o\left(2\mathbf{s} - 3\mathbf{s}^2\right) - C_0\left(1 - 4\mathbf{s} + 3\mathbf{s}^2\right)}{s_2 - s_1} \qquad (18.18)$$

и по значениям производной в концевых точках для коэффициентов получим $B_o=-k_o'(s_2)\ (s_2-s_1),\quad C_o=-\ (s_2-s_1)k_o'(s_1)$.

Если $\mathrm{B}_0 = 0$, то угол $\alpha_0 = 0$, кривая для нефти касается оси абсцисс. Процесс вымывания будет длиться бесконечно долго. Если $B_0=C_0=A_0$, то ОФП нефти - отрезок прямой. При $\mathrm{B}_0 = 0$ и $C_0= 2A_0$ получим кусок параболы. Монотонное снижение кривой $k_0(\mathbf{s})$ обеспечивается условиями: $0 \le B_o \le 3A_o,\ 0 \le C_o \le 3A_o$.

Выбор относительных фазовых проницаемостей в виде (18.15) и (18.17) позволяет получить значительно большее разнообразие кривых, нежели степенные аппроксимации. Были созданы удобные программы нахождения аналитических выражений в виде кубических полиномов по заданным экспериментальным точкам.

Модифицированные ОФП сборной ячейки.

В однородном хорошо выдержанном коллекторе образец характеризует ячейку расчётной модели. Экспериментально полученные ОФП будут одинаковы для малых и больших образцов. Малый экспериментальный образец компетентно характеризует ячейку модели и свойства всего коллектора.

Другое дело неоднородная залежь. Для представления свойств коллектора экспериментальный образец должен превосходить характерный размер неоднородности всего коллектора, что в ряде случаев оказывается неприемлемым в эксперименте. ОФП для конечно-разностных ячеек гидродинамической модели было предложено получать расчетным путем, представляя ячейку составленным из малых образцов различной проницаемости и пористости с тем, чтобы ячейка имела характерную для коллектора структуру неоднородности. Расчетные ОФП для такой сконструированной сборной ячейки называют модифицированными.

Покажем их получение в случае параллельного расположения образцов и обратим внимание на возникающие при этом неопределенности. Обозначим: k_i, m_i, h_i проницаемость, пористость и поперечное сечение каждого из образцов, s_i - его водонасыщенность. Фазовые проницаемости всех образцов считаем различными, сами образцы – изолированными друг от друга.

Введем абсолютную проницаемость ячейки как среднее, взвешенное по слоям значение проницаемости

$$k = \frac{\sum k_i h_i}{\sum h_i} . \qquad (18.19)$$

Сложением потоков фаз по каждому из образцов получим для скорости фильтрации фаз через образец

$$v_o = \frac{1}{\mu_o}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{\sum k_i k_{oi}(s_i) h_i}{\sum h_i}, \quad v_w = \frac{1}{\mu_w}\frac{\Delta p}{\Delta x}\frac{\sum k_i k_{wi}(s_i) h_i}{\sum h_i} \qquad (18.20)$$

и для модифицированных относительных фазовых проницаемостей составного образца будем иметь формально выражения

$$k_o(s) = \frac{\sum k_i h_i k_{oi}(s_i)}{\sum k_i h_i}, \quad k_w(s) = \frac{\sum k_i h_i k_{wi}(s_i)}{\sum k_i h_i}, \quad s = \frac{\sum m_i h_i s_i}{\sum m_i h_i} . \qquad (18.21)$$

Формулы (18.21) дают модифицированные ОФП сборной ячейки по известным распределениям насыщенностей s_i образцов. Под действием гравитационных и капиллярных сил в реальных пластах происходит обмен массой по вертикали и устанавливается в некоторое распределение насыщенности s_i в каждом образце. Если же движение происходит под действием

больших градиентов давления, то влиянием капиллярных и гравитационных сил можно пренебречь и считать течение по каждому слою автономным, без обмена массы с соседними образцами. В этом случае решение для насыщенности водой по каждому слою может быть теоретически найдено и формулы (18.21) могут быть использованы. Вода будет прорываться по высоко проницаемым слоям опережающим образом, затем охватывать более низко проницаемые слои. Полной определенности в этом вопросе достичь невозможно, в зависимости от характера течения распределение насыщенностей может быть разным, разными будут получаться и модифицированные ОФП.

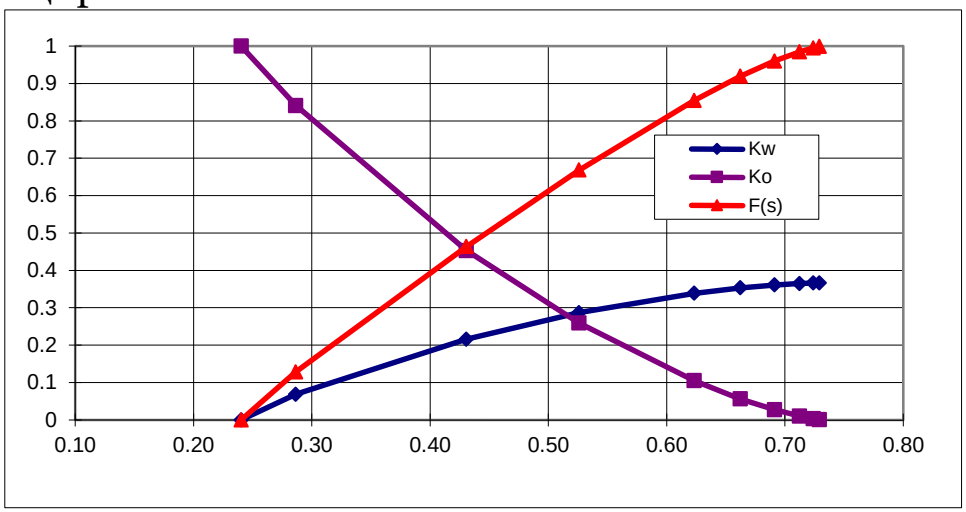


Рис. 16.3. Модифицированные ОФП залежи фундамента Белого Тигра.

Исходные относительные проницаемости образцов брались линейные, связанная водонасыщенность принималась большей для низко проницаемых образцов, конечное значение водопроницаемости зависела от s_1 и s_2. Водопроницаемость получилась выпуклой, проницаемость по нефти стала чуть выше.

Лекция 19

Моделирование вытеснения нефти водой.

Скорости фильтрации фаз при совместном течении нефти и воды. Суммарная скорость фильтрации фаз. Доля воды в потоке. Кажущаяся вязкость смеси. Уравнение для насыщенности водой. О решениях уравнения переноса. Характеристики. Решение одномерной задачи вытеснения нефти водой. Скачок насыщенности. Условия на скачке. Геометрическое определение скачка. Безводная и конечная нефтеотдача. Их определение. Связь кривой вытеснения с относительными фазовыми проницаемостями.

Дифференциальные уравнения совместной фильтрации фаз

Общепринято считать, что на процесс вытеснения нефти водой влияют: структура порового пространства, поверхностные силы смачивания фаз, разность плотностей и вязкости фаз. Относительные фазовые проницаемости в какой-то мере учитывают структуру порового пространства и свойства смачивания. Действие гравитационных сил из-за разности плотностей фаз пока затрагивать не будем. Процесс считаем изотермическим, нефть и воду – несжимаемыми жидкостями. При этих предположениях для скоростей фильтрации фаз в одномерном случае принимают

$$u_w = -\frac{k}{\mu_w} k_w(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_o = -\frac{k}{\mu_o} k_o(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{19.1}$$

как для установившегося, так неустановившегося течения.

ОФП должны быть выбраны с учетом экспериментальных данных, а в случае их отсутствия – по аналогии с известной однотипной нефтяной залежью. Экспериментальные данные возможны в области значений водонасыщенности $s_1 < s < s_2$. В интервале $s < s_1$ принимается $k_w = 0$, а k_o остаётся не определённым; в интервале $s_2 < s < 1$ принимается $k_o = 0$, а k_w остаётся не определённым. Обычно за абсолютную проницаемость берут проницаемость по нефти при наличии связанной водонасыщенности, и тогда $k_o(s_1) = 1$. Такие кривые ОФП называют нормированными по проницаемости нефти. В случае необходимости, например, при нормировании по воздухопроницаемости очищенного образца, для

неопределённых участков принимают гладкое продолжение, сходящиеся к $k_w(1) = 1,\ k_o(0) = 1$.

Складывая (19.1), для суммарной скорости фаз имеем

$$u = u_w + u_o = -k\left(\frac{k_w(s)}{\mu_w} + \frac{k_o(s)}{\mu_o}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k}{\mu_c}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\mu_c = \left(\frac{k_w(s)}{\mu_w} + \frac{k_o(s)}{\mu_o}\right)^{-1}. \qquad (19.2)$$

Здесь μ_c – кажущаяся вязкость совместного движения фаз. Она определена для интервала $s_1 < s < s_2$. При нормировании ОФП по воздухопроницаемости $\mu_c(0) = \mu_o,\ \mu_c(1) = \mu_w$. При нормировании ОФП по проницаемости нефти со связанной водой $\mu_c(s_1) = \mu_o,\ \mu_c(s_2) = \mu_w/k_w(s_2)$. Обычно при проведении расчётов, как правило, $s_1 < s < s_2$, и вопрос о значениях кажущейся вязкости за этим интервалом не возникает.

Формулы (19.2) показывают, что для суммарной скорости совместной фильтрации фаз также имеет место закон Дарси, но с вязкостью, зависящей от насыщенности водой поровой среды. Долей воды в потоке называют функцию водонасыщенности, которая представляет собой отношение скорости фильтрации воды к суммарной скорости фильтрации фаз. Доля воды в потоке определена на всём отрезке $0 < s < 1$ и зависит ещё от отношения вязкостей фаз

$$F(s) = \frac{u_w}{u_w + u_o} = \frac{k_w(s)}{k_w(s) + \mu k_o(s)}, \quad \mu = \frac{\mu_w}{\mu_o} \qquad (19.3)$$

На рис. 19.1 изображены относительные фазовые проницаемости и доля воды в потоке при отношении вязкостей 0.55 для естественных кернов

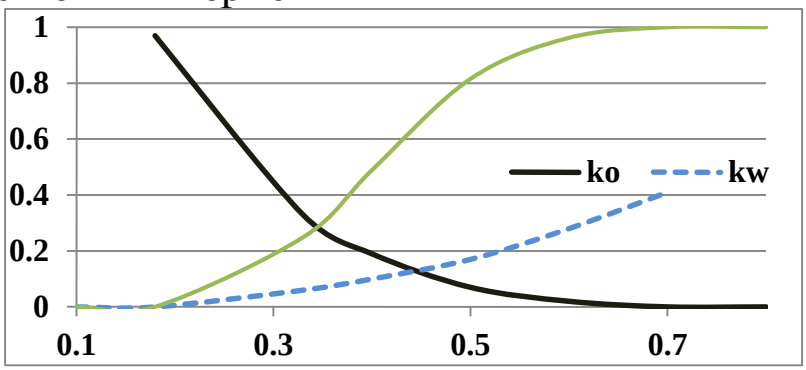


Рис. 19.1. Относительные фазовые проницаемости и доля воды в потоке для естественных кернов при μ=0.55. Касательная определяет насыщенность на фронте воды.

Со снижением отношения вязкостей доля воды в потоке становится более крутой кривой и насыщенность на фронте становится ниже. На рис. 19.2 даны графики доли воды в потоке для модельных кубических фазовых проницаемостей при значениях отношения вязкостей 0.01; 0.1; 0.5 и 1. По графикам видно, как сильно влияет отношение вязкостей на рост доли воды в фильтрационном потоке.

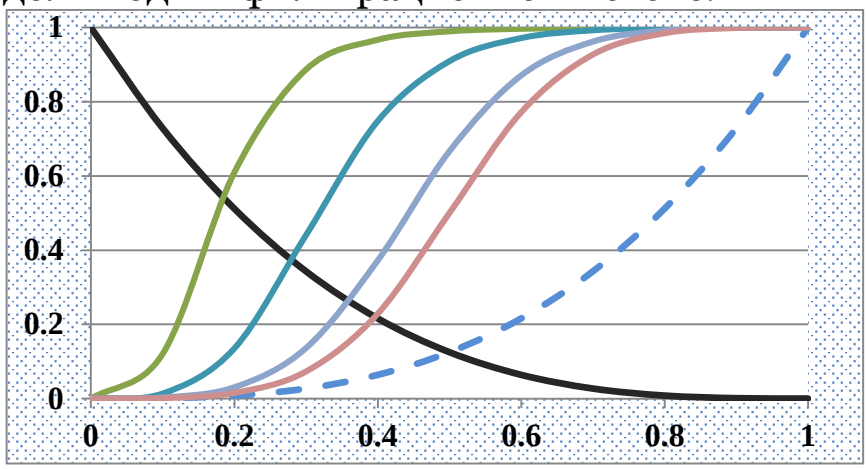


Рис. 19.2. Доля воды $F(s)$ для кубических ОФП $k_w=s^3$ и $k_o=(1-s)^3$ и различных значений отношения вязкости вытесняющей фазы к вытесняемой фазе μ=0.01; 0.1; 0.5; 1.

На рис. 19.3 изображены графики кажущейся вязкости при совместной фильтрации нефти и воды для кубических ОФП при вязкости вытесняемой фазы, равной 1. Из графиков видно, что фильтрационное сопротивление при совместном движении фаз может стать кратно больше.

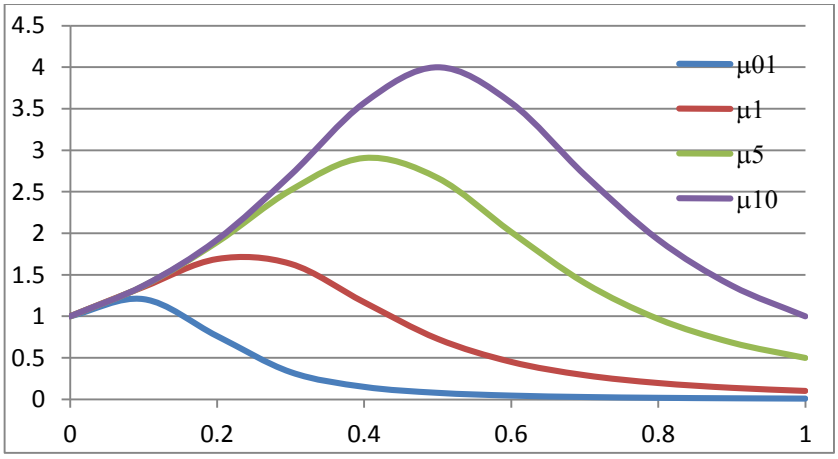


Рис.19.3. Кажущаяся вязкость для кубических ОФП $k_w=s^3$ и $k_o=(1-s)^3$ для различных значений отношения вязкости вытесняющей фазы к вытесняемой фазе μ=0.01; 0.1; 0.5; 1.

Уравнение для водонасыщенности.

Пренебрегая сжимаемостью, условие сохранения массы воды и массы нефти при фильтрации через элементарный объём представим в виде (m – пористость)

$$\frac{\partial(m\rho_w s)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_w u_w)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(m\rho_o(1-s))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_o u_o)}{\partial x}=0. \qquad (19.4)$$

Плотности фаз не играют роли (сокращаются), пористость принимаем постоянной и вводим функцию доли воды в потоке (19.3), которую полагаем дифференцируемой. Упрощая и складывая, получим уравнения

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+uF'(s)\frac{\partial s}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (19.5)$$

Первое из них и есть дифференциальное уравнение для водонасыщенности, второе уравнение показывает, что суммарная скорость фильтрации несжимаемых фаз в любом сечении трубки одинакова, они не зависит от координаты, а будет зависеть от времени, если распределение насыщенности меняется во времени. Если воспользоваться выражением для суммарной скорости фильтрации фаз (19.2), то можно суммарную скорость фаз связать с перепадом давления уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{k_w(s)}{\mu_w}+\frac{k_o(s)}{\mu_o}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]=0. \qquad (19.6)$$

Если производится нагнетание воды с постоянным известным расходом, то суммарная скорость фильтрации фаз будет известна, и задача по определению распределения насыщенности по линейному образцу решается по первому из уравнений (19.5). Второе же уравнение в виде (19.6) служит для определения распределения давления по образцу. Если же поддерживается постоянный перепад давления вдоль образца регулированием уровня напора нагнетаемой воды, то оба решаются совместно, и поэтапно во времени.

Уравнение переноса.

Так называют уравнение первого порядка в частных производных с постоянным коэффициентом a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + a\frac{\partial s}{\partial x} = 0 . \qquad (19.7)$$

Как правило, коэффициент a имеет размерность скорости. Общим решением уравнения является любая дифференцируемая функция $s(x,t) = \Phi(x - at)$, определяемая по начальным или граничным данным.

Например, если для уравнения переноса задача решается в бесконечной области $-\infty < x < \infty$ для $t > 0$, и дано начальное условие $s(x,0) = \sin x$, то решение представится в виде $s(x,t) = \sin(x - at)$, то есть заданные начальные условия «побегут» вдоль оси абсцисс со скоростью a. Если же задача решается в полу-бесконечной области $0 < x < \infty$ для $t > 0$, и даны начальное условие $s(x,0) = \sin x$ и граничное условие $s(0,t) = 0$, то решение представится как $s(x,t) = \sin(x - at)$ при условии $x > at$, а для $x < at$ будет $s(x,t) = 0$. Это значит, что с границы вслед за начальными «бегут» граничные с той же скоростью a.

Покажем, как находят решение для области $x > 0,\ t > 0$ при задании начального условия $s(x,0) = \varphi(x)$ и граничных значений $s(0,t) = \psi(t)$. Подстановка в общее решение начального условия даёт $\Phi(x) = \varphi(x)$ только для $x > 0$. Но задание граничных значений определяет решение для отрицательных значений аргумента. При $x = 0$ имеем $\Phi(-at) = \psi(t)$, что означает $\Phi(x) = \psi(-x/a)$ для $x < 0$. Решение можно записать в виде «ломаной» формулы

$$s(x,t) = \begin{cases} \varphi(x - at), & x > at \\ \psi\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & x < at \end{cases} \qquad (19.8)$$

Общее решение (19.8) показывает, что для уравнения переноса на каждой линии из семейства линий $x - at = const$ значение решения сохраняется. Эти линии называются характеристиками решения.

Уравнение для водонасыщенности (19.5) отличается от уравнения переноса тем, что оно квазилинейно. Аналог коэффициента $a = uF'(s)/m$ зависит от значений искомой функции. Тем не менее, значения искомой функции сохраняются вдоль характеристик, каждое из значений искомой функции «переносится» вдоль линии $x = \frac{utF'(s)}{m} +$

$const$, если такое семейство линий не имеет самопересечений, и переносится лишь «до поры до времени», если имеются самопересечения.

Задача вытеснения.

Рассмотрим простейшую задачу вытеснения нефти водой с постоянной суммарной скоростью фильтрации u для $x > 0$ и $t > 0$. Пусть заданы начальные условия в виде постоянного значения связанной водонасыщенности, $s(x,0) = s_1$. На входной границе закачиваем только воду, и граничные значения равны максимальной водонасыщенности, $s(0,t) = s_2$. Такая задача является автомодельной, уравнение (19.5) допускает группу преобразований подобия, решение можно искать как функцию безразмерной переменной τ

$$s(x,t) = f(\tau), \quad \tau = \frac{ut}{mx}, \quad f(0) = s_1, \quad f(\infty) = s_2 . \qquad (19.9)$$

Автомодельность предполагает, что значения s_1 и s_2 – константы. В новых переменных все начальные значения x собрались в одну точку $\tau = 0$, а граничные – в другую точку $\tau = \infty$.

Подставляя (19.9) в (19.5), имеем

$$\frac{mu}{mx}\frac{ds}{d\eta} + uF'(s)\frac{ds}{d\tau}\cdot\left(-\frac{ut}{mx^2}\right) = 0, \text{или } \frac{ds}{d\tau}\cdot\left(1-\tau\cdot F'(s)\right) = 0 . \qquad (19.10)$$

Полученное уравнение означает, что решение может быть составлено из отрезков постоянных значений водонасыщенности и дуг неявной функции

$$F'(s) = \frac{mx}{ut} . \qquad (19.11)$$

Но сначала ознакомимся поближе с производной доли воды в фильтрационном потоке по водонасыщенности и образованием разрывных решений.

Доля воды в фильтрационном потоке.

Как следует из формулы (19.3), производная функции $F(s)$ представится в виде

$$F'(s) = \mu\frac{k_w'(s)k_o(s) - k_w(s)k_o'(s)}{\left[k_w(s) + \mu k_o(s)\right]^2}, \quad s_1 < s < s_2 . \qquad (19.12)$$

Значения производной на концах интервала насыщенности составят

$$F'(s_1)=\frac{1}{\mu}\frac{k_w'(s_1)}{k_o(s_1)},\quad F'(s_2)=-\mu\frac{k_o'(s_2)}{k_w(s_2)}. \tag{19.13}$$

Не обязательно, чтобы они на концах интервала обращались в нуль. Из лабораторных экспериментов этого не следует. Но производная внутри интервала всегда положительна, может обращаться в нуль лишь на концах интервала. Вначале с ростом водонасыщенности производная растёт, достигает максимума, а затем убывает. Для ряда случаев применяемых относительных фазовых проницаемостей, например, кубических, производная доли воды на концах интервала обращаются в нуль. На рис.19.2 показано изменение доли воды с ростом насыщенности.

В таблице 19.1 представлены данные, усредненные по двум десяткам образцов фундамента Белого Тигра: средняя водонасыщенность образца s; относительные фазовые проницаемости нефти k_o и воды k_w; доля воды в потоке F в зависимости от μ.

Таблица 19.1. Усредненные по кернам ОФП и доля воды в потоке для некоторых значений μ.

s	0.195	0.398	0.485	0.553	0.622	0.73
k_o	1	0.338	0.148	0.077	0.037	0
k_w	0	0.032	0.049	0.069	0.100	0.179
F, μ=0.1	0	0.486	0.768	0.898	0.964	1
F, μ=0.33	0	0.223	0.501	0.728	0.891	1
F, μ=0.55	0	0.147	0.376	0.616	0.831	1
F, μ=0.88	0	0.097	0.273	0.501	0.754	1

В пластовых условиях, на глубинах 3.5-4 км, отношение вязкости воды к вязкости нефти залежи фундамента составляет 0.55. В лабораторных условиях моделирования отношение вязкостей было 0.88. При вытеснении нефти газом отношение вязкостей имеет значения порядка десятых долей. Приведённые в таблице значения F были гладко аппроксимированы, найдена производная $F'(s)$ s. Графики изображены на рис. 19.4.

По графикам видно, что участки возрастания и убывания производной могут менять выпуклость на вогнутость с

уменьшением отношения вязкостей. Обращение в нуль $k_o(s_2)$ означает, согласно формулам (19.13), касание с осью водонасыщенности. Рис. 19.4 показывает, что $F'(s_2) < 0$, т.е. для ОФП керновых образцов залежи фундамента характерного касания не наблюдалось. Возможно, это связано с недостаточностью числа замеров. В случае ОФП $k_w(s) = s^3$, $k_o(s) = (1-s)^2$ такие же графики изображены на рис. 19.5 и касание имеет место.

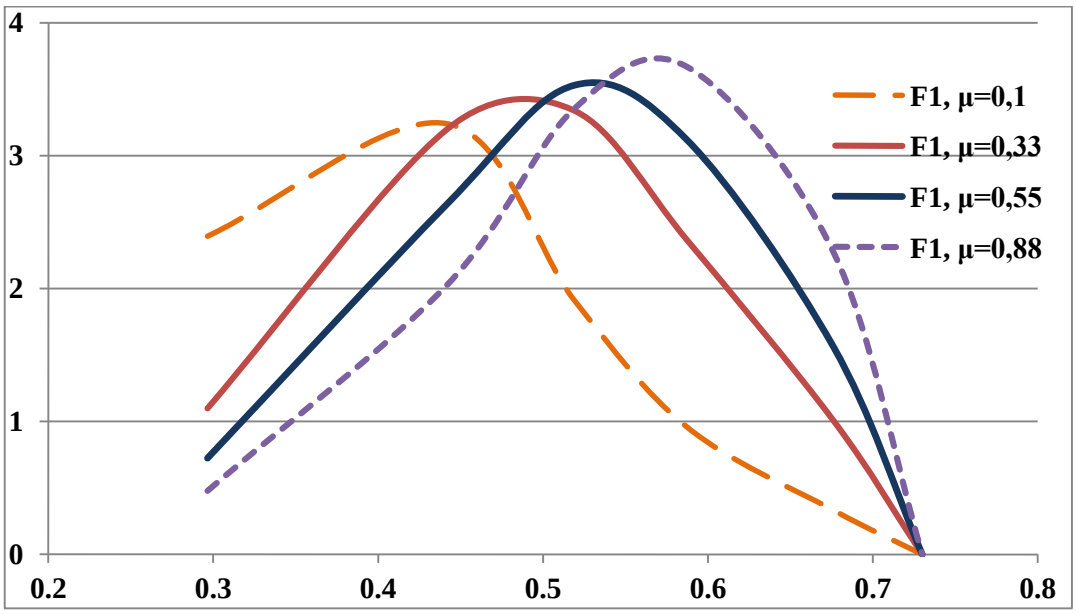


Рис.19.4. Графики производной доли воды в потоке $F'(s)$ от насыщенности водой для различных значений отношения вязкостей μ.

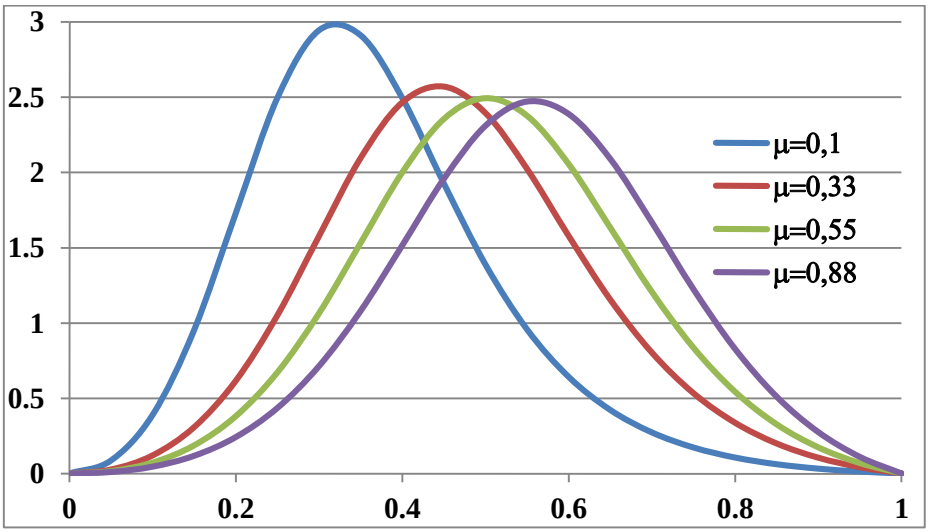


Рис. 19.5. Те же графики $F'(s)$ в случае кубической по воде и квадратной по нефти относительных фазовых проницаемостей от нормированной водонасыщенности.

Расчетные кривые $F'(s)$ на рис 19.5 однотипные. Нет изменений характера кривизны, как на рис. 19.4, на участке снижения производной с ростом отношения вязкостей μ, по крайней мере, для μ<1.

Характеристики решения.

Как следует из формулы решения (19.11), значения водонасыщенности в процессе вытеснения остаются постоянными вдоль прямых линий $x = utF'(s)/m$, которые называются характеристиками. Назначив фиксированное значение водонасыщенности из интервала $s_1 < s < s_2$, по значениям производной $F'(s)$, определяем движение того или иного значения насыщенности вдоль координатной оси. По рис. 17.4 и 17.5 видно, что высокие значения насыщенностей s движутся медленно, также медленно движутся и низкие значения s. Можно указать два значение s - и высокое, и низкое, которые движутся одинаково. Из двух этих значений физически возможно лишь большее значение скорости.

Составим решение задачи, используя только правую ветвь графика $F'(s)$ и начальное значение насыщенности s_1. Решение должно состоять из (19.11) в области снижения $F'(s)$ от некоторого значения s_c на фронте вытеснения до максимального значения насыщенности водой s_2, т.е. в области $s_c < s < s_2$ применяем неявную форму (19.11). Однако до прихода фронта воды насыщенность остаётся равной начальному значению s_1. Совместить их можно лишь введением разрыва насыщенности соответствующего фронту со скачком водонасыщенности $(s_c - s_1)$.

Решение можно представить в явно-неявном виде

$$s = s_1, \quad x > \frac{ut}{m} F'(s_c); \quad F'(s) = \frac{mx}{ut}, \quad x < \frac{ut}{m} F'(s_c) \qquad (19.14)$$

Всё свелось к определению насыщенности на фронте вытеснения s_c. Её определяем из соображений материального баланса – сохранения массы воды на фронте вытеснения, при наличии разрыва насыщенности.

Определение насыщенности на фронте вытеснения.

Пусть перед фронтом вытеснения значения насыщенности составляет s_1, и в этой области движущей фазой является лишь нефть. После вторжения воды с насыщенностью s_c движутся обе фазы: и нефть, и вода. Движение фронта воды определяется уравнением $x_c = utF'(s_c)/m$, за время dt фронт воды пройдёт расстояние $dx = udtF'(s_c)/m$. Вторгнувшаяся масса воды составит $m(s_c - s_1)dx$. С другой стороны вторгнувшаяся масса должна равняться доле воды в фильтрационном потоке $F(s_c)$, помноженной на суммарную скорость и время, udt . Приравняем

$$m\left(s_c - s_1\right)\cdot udtF'\left(s_c\right)/m = F\left(s_c\right)\cdot udt \qquad (19.15)$$

Отсюда имеем уравнение для насыщенности на фронте s_c

$$F'\left(s_c\right) = \frac{F\left(s_c\right)}{s_c - s_1}. \qquad (19.16)$$

В таком виде запись удобна тем, что имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Производная $F'(s_c)$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке s_c , а дробь то же есть тангенс угла прямоугольного треугольника с противолежащим катетом – ординатой $F(s_c)$, и прилежащим катетом – разностью $(s_c - s_1)$, равной скачку насыщенности. Насыщенность на фронте вытеснения определится как абсцисса точки касания прямой, проведённой из точки $(s_1, 0)$ к графику функции $F(s)$. На рис. 19.4 показано проведение касательной.

В некоторых простых случаях уравнение (19.16) удаётся решить аналитически. Так, например, для модельных ОФП $k_w(s) = s^2,\ k_o(s) = (1-s)^2, s_1 = 0, s_2 = 1$

$$s_c = \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} = \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_w + \mu_o}}. \qquad (19.17)$$

Если же для ОФП воды принять кубическую зависимость, сохранив для нефти квадратную, то для насыщенности на скачке получим кубическое уравнение $(1-\mu)s_c^3 + 3\mu s_c = 3\mu$, решение которого можно явно выписать формулой Кардано для приведённого кубического уравнения. Для отношения вязкостей μ=0.1; 0.2; 0.33; 0.55 и 0.88 квадратичные ОФП дают значения насыщенности на скачке s_c=0.302; 0.408; 0.498; 0.596

и 0.684. Замена ОФП воды на 3-ю степень дают превосходящие значения s_c=0.536; 0.644; 0.733; 0.839 и 0.96 при тех же μ.

Почти кубические по воде и квадратные по нефти степенные ОФП были использованы в расчётах показателей вытеснения нефти месторождения Узень. Они были получены по экспериментальным данным ВНИИ и выражались в виде $k_w(s) = 3.56(s - 0.30)^{2,85},\ k_o(s) = 5.43(0.72 - s)^{1,95}, s_1 = 0.30, s_2 = 0.72$. Вытесняемая часть нефти занимает 42% всего порового пространства. Для тех же отношений вязкостей μ=0.1; 0.2; 0.33; 0.55 и 0.88 значения насыщенности на скачке составляют: s_c=0.561; 0.601; 0.629; 0.655 и 0.673. Это довольно высокие значения насыщенности на фронте, свидетельствующие о близости вытеснения к поршневому характеру. В пластовых условиях Узени отношение вязкостей примерно 0.2-0.3. Подгоняют ОФП нефти и воды, используя лабораторные данные и показатели разработки. Если, например, ОФП по воде уменьшить всюду n раз, доля воды в потоке $F(s)$ станет такой, как будто μ увеличили n раз. Соответствующим образом изменится и насыщенность на фронте вытеснения.

Безводная нефтеотдача.

Так называют ту долю от общего количества нефти в экспериментальном образце, которую можно извлечь до прорыва воды. Чтобы найти её, проинтегрируем разность $s(x,t) - s_1$ по длине всего образца и поделим результат на величину начальной доли нефти в образце $(1 - s_1)l$, где l есть длина образца. Обозначая безводную нефтеотдачу через η_o, имеем

$$\eta_o = \frac{1}{(1-s_1)l}\int_{x=0}^{x=l}(s-s_1)dx = \frac{1}{(1-s_1)l}\left[(s-s_1)x\Big|_0^l - \int_{s_2}^{s_c} x ds\right]. \qquad (19.18)$$

Здесь выполнено интегрирование по частям, что позволяет использовать решение. Заменим x по формуле (19.11) выражением $utF'(s)/m$ на момент прорыва воды, зная, что в момент прорыва будет $l = utF'(s_c)/m$. Тогда под интегралом можно координату x заменить выражением $x = lF'(s)/F'(s_c)$. Подставив в (19.18), получаем

$$\eta_o = \frac{1}{1-s_1}\left[s_c - s_1 - \int_{s_2}^{s_c}\frac{F'(s)}{F'(s_c)}ds\right] = \frac{1}{1-s_1}\left[s_c - s_1 + \frac{1-F(s_c)}{F'(s_c)}\right]. \qquad (19.19)$$

Найденное выражение упрощается, если использовать формулу (19.6), определяющую насыщенность на фронте вытеснения, т.е. $(s_c - s_1)F'(s_c) = F(s_c)$.

$$\eta_o = \frac{1}{(1-s_1)F'(s_c)}. \qquad (19.20)$$

Приведём некоторые подсчёты. Для ОФП Узени и отношения вязкостей μ=0.1; 0.2; 0.33; 0.55 и 0.88 получим η_o=0.452; 0.494; 0.525; 0.561 и 0.566. Если бы упростили ОФП до квадратичных выражений $k_w(s) = 0{,}85(s - 0{,}30)^2$, $k_o(s) = 5{,}67(0{,}72 - s)^2, s_1 = 0{,}30$, $s_2 = 0.72$, то для тех же отношений вязкостей получили бы η_o=0.404; 0.466; 0.504; 0.536 и 0.559. Замена куба квадратом при сохранении концевых точек привёл к заметному снижению безводной отдачи нефти. Если за ОФП примем $k_w(s) = 0.714(s - 0.30), k_o(s) = 5.67(0.72 - s)^2$, то при тех же отношениях вязкостей получим значения η_o=0.20; 0.376; 0.465; 0.52 и 0.56. В экспериментах на образцах залежи фундамента Белого Тигра безводная отдача нефти составляла 38-40%, что ниже полученных выше показателей.

Конечная нефтеотдача.

Процесс вымывания нефти длится достаточно долго, что позволило геологам предположить возможность наличия притока нефти из более глубоко залегающих пластов в эксплуатируемый пласт. Если $k_o(s)$ касается в конечной точке оси абсцисс, то вытеснение длится бесконечно. Если же ОФП нефти пресекает ось абсцисс под некоторым (хоть и малым) углом, процесс вытеснения будет конечным. Формула (19.14) показывает, что $F'(s)$ может стать нулём, если только $t = \infty$. Для конечного времени вытеснения $F'(s) > 0$. Принято за время полного вытеснения считать достижение обводнённости $F(s) \geq 0.98$ или прокачку через образец 10 поровых объёмов пласта.

Получим формулу нефтеотдачи образца на момент достижения водонасыщенности $s > s_c$ на выходе из образца $x = l$. Проинтегрируем $s(x,t) - s_1$ по длине всего образца и поделим результат на величину начальной нефти в образце $(1 - s_1)l$. Обозначая конечную нефтеотдачу буквой η, имеем

$$\eta = \frac{1}{(1-s_1)l}\int_{x=0}^{x=l}(s-s_1)dx = \frac{1}{(1-s_1)l}\left[(s-s_1)x\Big|_0^l - \int_{s_2}^{s} x\,ds\right]. \qquad (19.21)$$

Здесь выполнено интегрирование по частям. Заменим x по формуле (19.11) выражением $utF'(s)/m$. Интегрируя, получаем

$$\eta = \frac{1}{1-s_1}\left[s - s_1 + \int_s^{s_2} \frac{F'(s)}{F'(s_c)} ds \right] = \frac{1}{1-s_1}\left[s - s_1 + \frac{1-F(s)}{F'(s_c)} \right]. \qquad (19.22)$$

Найденному выражению можно дать изящную геометрическую интерпретацию. По обводнённости $\xi_e<1$, приравнивая $F(s)=\xi_e$, находим насыщенность на выходе из образца s_e. Числитель дроби в квадратных скобках есть отрезок от точки графика $F(s_e)$ до 1. В знаменателе тангенс угла касательной к графику $F(s)$. Дробь представляет собой отрезок δ, отсекаемый вертикалью и прямой, проведённой параллельно касательной к графику $F(s)$ в точке $(s_e, F(s_e))$, от прямой $\xi=1$. Выражение в квадратных скобках представляет собой отрезок оси абсцисс от s_1 до проекции точки пересечения. Отношение его к $(1-s_1)$ получаем построением подобных треугольников: первого с вершинами $(s_1,0)$; $(1,0)$ и $(s_1,1)$ и второго с вершинами $(s_1,0)$; $(s_e+\delta,0)$ и (s_1,η). На рис. 19.6 показано геометрическое построение нефтеотдачи $\eta>\eta_0$ по фиксированному значению обводнённости $\xi=0.9$ и квадратных ОФП.

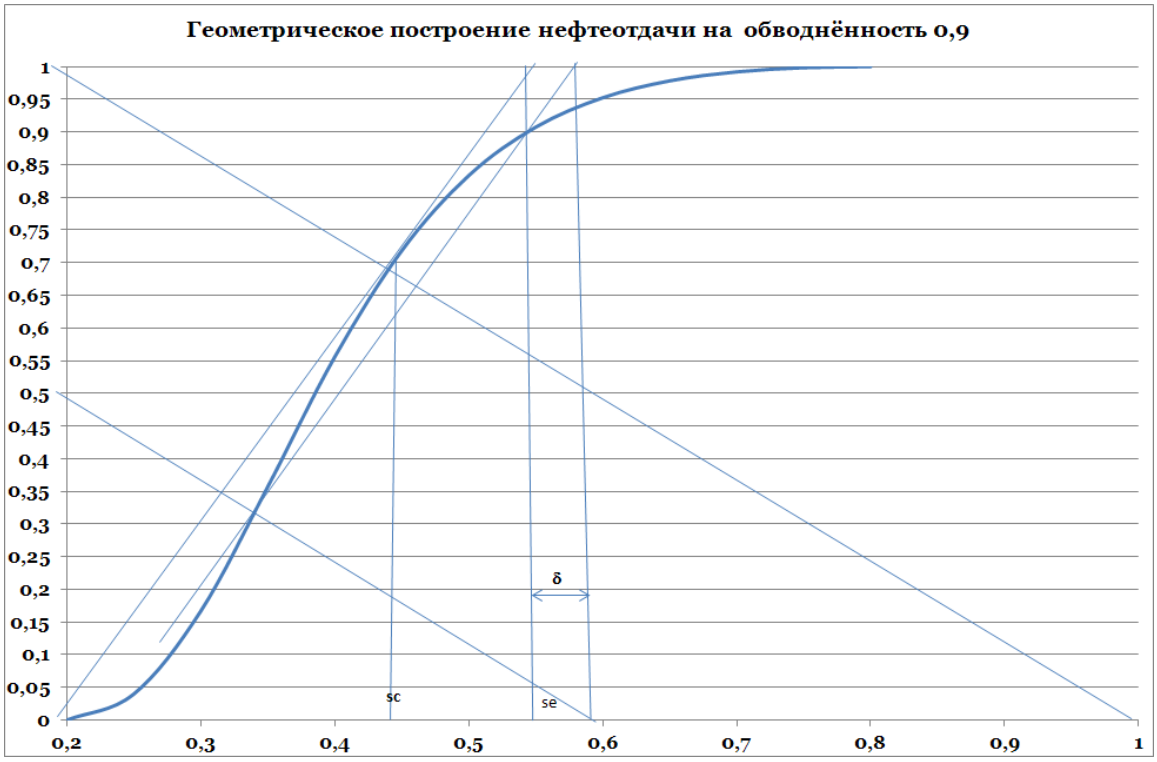


Рис.19.6. Доля воды $F(s)$ изображена жирной линией. Связанная вода–0.2, максимальная – 0.8. Отношение вязкостей 0.2.

Проведением касательной получено s_c, по обводнённости 0.9 получено значение насыщенности на выходе s_e, проведением параллельно касательной прямой получено значение δ, построением подобных треугольников найдена нефтеотдача.

Геометрический метод удобен для предварительных оценок нефтеотдачи от обводнённости. Для разных видов ОФП картинки будут получаться различными. Зачастую удаётся отбросить явно неправдоподобные варианты.

Лекция 20.

Влияние гравитационных сил на вытеснение.

Давления в фазах. Скорости фильтрации фаз. Фильтрационная скорость сегрегации. Максимальное значение. Вертикальное вниз вытеснение. Граничное условие на входе. Решение задачи вертикального вытеснения. Фронт вытеснения и фронт вымывания. Случай неполного вымывания. Нефтеотдача и обводнённость. Вытеснение под углом к вертикали. Влияние разности плотностей на показатели вытеснения.

Вертикальное вытеснение.

Теория предполагает, что двухфазное течение в порах и трещинах коллектора имеет место лишь при наличии связности в каждой из фаз. Несвязная фаза не движется. Скорости фаз пропорциональны градиентам динамических давлений в фазах, без их статических составляющих. Прежде чем применять закон Дарси, от пластового давления следует удалить его статическую составляющую.

Направим ось Oz вертикально вниз, тогда для одномерного движения скорости фильтрации воды и нефти в общепринятых обозначениях представятся в виде [10]

$$v_w = -\frac{kk_w(s)}{\mu_w}\frac{\partial p_w}{\partial z}, \quad v_o = -\frac{kk_o(s)}{\mu_o}\frac{\partial p_o}{\partial z}, \qquad (20.1)$$

$$p_w = p - \rho_w g z, \quad p_o = p - \rho_o g z$$

Здесь k – абсолютная проницаемость для однофазной фильтрации. Обычно в лабораторных определениях принимают другой вариант: полагают $k_o(s_1)=1$, и в качестве k будет фигурировать тогда найденное по нефти значение проницаемости при наличии связанной воды, меньшее абсолютной проницаемости для однофазной фильтрации.

Введем, как и ранее, суммарную скорость фильтрации фаз v, функцию насыщенности $F(s)$ и отношение вязкостей μ согласно формулам

$$v = v_w + v_o, \quad F = \frac{k_w}{k_w + \mu k_o}, \quad \mu = \frac{\mu_w}{\mu_o} \qquad (20.2)$$

Выражения для скоростей фаз преобразуются к виду

$$v_w = F(s)v + v_g(s), \quad v_o = \big(1 - F(s)\big)v - v_g(s) \tag{20.3}$$

$$v_g(s) = \frac{k\Delta\rho\, g}{\dfrac{\mu_w}{k_w(s)} + \dfrac{\mu_o}{k_o(s)}}, \quad \Delta\rho = \rho_w - \rho_o . \tag{20.4}$$

Из формул (20.3) следует, что гравитация увеличивает скорость фильтрации водной фазы при вытеснении сверху вниз (v >0) и уменьшает ее при вытеснении снизу вверх (v<0). При нулевой суммарной скорости фаз, когда v = 0, водная фаза фильтруется вниз со скоростью $v_g(s)$, нефтяная фаза – вверх с той же скоростью. Формула (20.4) характеризует гравитационную сегрегацию обеих фаз. Скорость гравитационной сегрегации $v_g(s)$ равна нулю при насыщенностях s_1 и s_2, она максимальна для значения водонасыщенности, удовлетворяющей уравнению

$$k_o' k_w^2 + \mu k_w' k_o^2 = 0 \tag{20.5}$$

Например, для степенных ОФП вида – s^n для воды и $(1\text{-}s)^n$ для нефти – максимальные значения фильтрационной скорости сегрегации фаз достигается при насыщенности

$$s = \frac{\sqrt[n+1]{\mu}}{1 + \sqrt[n+1]{\mu}}, \tag{20.6}$$

что чуть меньше половины при μ<1. Экспериментальные данные указывают на смещение максимума скорости сегрегации чуть вправо половины интервала изменения насыщенностей. Следовательно, кривые ОФП не имеют симметрии (график указывает 0.485, а середина интервала 0.46). Были вычислены максимальные значения скоростей сегрегации для совместной фильтрации нефти и воды по различным зонам и слоям залежи фундамента Белого Тигра. Максимальная скорость сегрегации для ОФП, экспериментально полученных на образцах кернов скважин фундамента, при проницаемости 0.05 мкм² (около 50 мД) и вязкостях нефти и воды в 0.43 и 0.23 мПа·с для разности плотностей Δρ=350 кг/м³ составила 0.72 м/год. Даже для хорошо проницаемых поровых коллекторов фильтрационные скорости сегрегации составляют метры в год.

Чтобы получить физическую скорость сегрегации, следует (20.4) поделить ещё на подвижную часть пористости $m(s_2\text{-}s_1)$.

Физические (истинные) значения скоростей сегрегации будут в десятки раз больше. Наличие одиночных трещин раскрытости мм и более может также резко изменить картину в сторону увеличения сегрегации фаз.

На рис. 20.1 показаны ОФП для кернового материала залежи фундамента, функция $F(s)$ и представлена скорость сегрегации фаз (м/год) для вышеуказанных значений параметров.

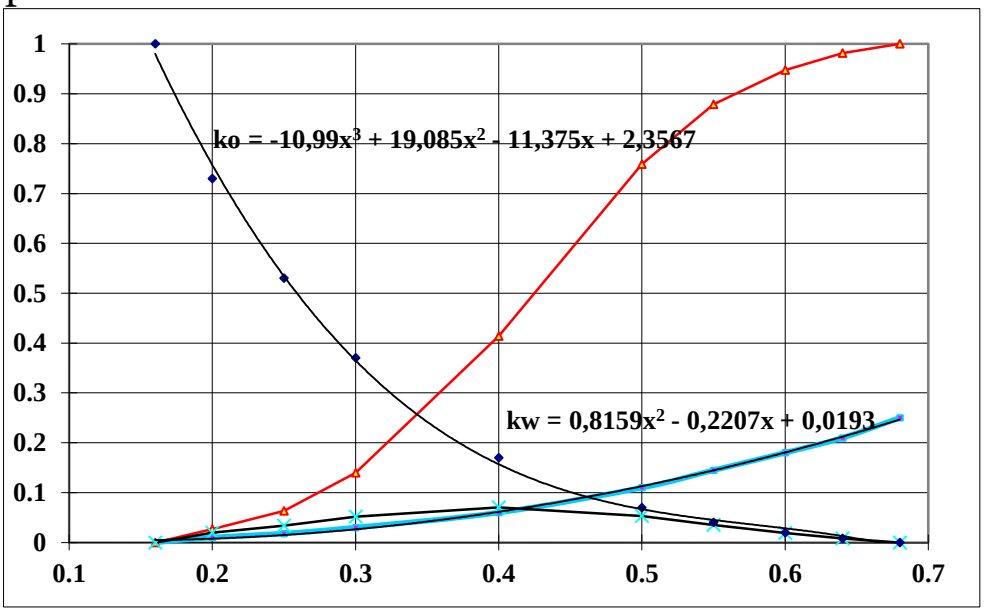


Рис. 20.1. ОФП по керновым исследованиям залежи фундамента Белого Тигра и скорость гравитационной сегрегации фаз.

Уравнение для водонасыщенности.

Используем уравнение сохранения массы воды в элементарном объеме

$$\frac{\partial(ms\rho_в)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_в v_в)}{\partial z}=0 \qquad (20.7)$$

Пренебрегая сжимаемостью воды и заменяя скорость воды по (1.3), для случая постоянной суммарной скорости фаз v=const, получаем для водонасыщенности нелинейное уравнение в частных производных

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\left(vF'(s)+v_g'(s)\right)\frac{\partial s}{\partial z}=0 \qquad (20.8)$$

Это уравнение того же типа, как и в случае отсутствия силы тяжести. Изменилась лишь функция, входящая множителем при производной $\partial s/\partial z$. Чтобы свести задачу к известному классическому случаю, вводим обозначение модифицированной доли воды в потоке

$$F_*(s) = F(s) + aV_g(s) = \frac{k_w(s)\left[1 + ak_o(s)\right]}{k_w(s) + \mu k_o(s)}, \quad a = \frac{v_*}{v}, \quad v_* = \frac{k\Delta\rho g}{\mu_o}. \quad (20.9)$$

и тогда уравнение (20.8) принимает общеизвестный вид

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + vF_*'(s)\frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (20.10)$$

В случае вытеснения вверх, когда $v < 0$, имеем $F_*(s) < F(s)$. При вытеснении нефти вниз, когда $v > 0$, наоборот $F_*(s) > F(s)$. Таким образом, изучение влияния тяжести на характеристики вытеснения сводится к рассмотрению изменений этих характеристик при изменении функции $F(s)$.

На рис. 20.2 показан вид функций F и $v_g(s)$, F_* для $v < 0$ (вытеснение вверх), F_* для $v > 0$ (вытеснение вниз).

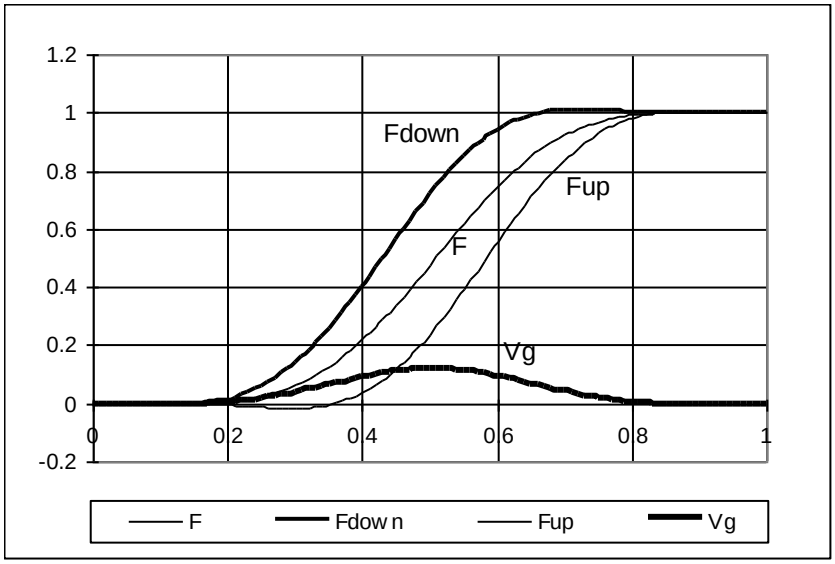


Рис. 20.2. Вид графиков функций $F(s)$, $v_g(s)$ и для вытеснения снизу вверх F_{up} и вытеснения сверху вниз F_{down} (при абсолютной проницаемости в 10 мД).

Фронт вытеснения и скачок насыщенности.

Решения квазилинейного уравнения (20.10) обладают свойством сохранять значение насыщенности s вдоль характеристик, определяемых соотношением

$$m\frac{dz}{dt} = vF_*'(s) \quad (20.11)$$

т.е. каждое фиксированное значение водонасыщенности s несется в фильтрационном потоке согласно уравнению движения

$$z - z_0(s) = \frac{vt}{m} F_*'(s) \qquad (20.12)$$

Чтобы изобразить распределение насыщенностей по образцу, достаточно на данный момент времени построить график s как функцию z и начальной точки z_0. Формула (20.12) задает в неявном виде зависимость s от времени t и координаты z для всех возможных z_0.

На фронте вытеснения значение насыщенности меняется скачком от значения связанной водонасыщенности s_1 до её значения на скачке s_c. Движение фронта вытеснения описывается уравнением

$$z_c(t) = \frac{vt}{m} F_*'(s_c) \qquad (20.13)$$

За фронтом вытеснения значения насыщенностей повышаются, при определённых условиях достигают некоторого максимального значения $s_в$ на фронте полного обводнения. Фронт полного обводнения также движется равномерно во времени по закону

$$z_в = \frac{vt}{m} F_*'(s_в), \quad s_в \le s_2. \qquad (20.14)$$

Полное обводнение не достигается лишь в случае, когда $s_в = s_2$ и кривая ОФП нефти касается оси насыщенностей в точке s_2. В этом случае $z_в = 0$.

Значение насыщенности на скачке s_c определяется условием баланса объемов вторгшейся в нефтяную зону воды и омываемой надвигающимся скачком насыщенности областью коллектора, что приводит к соотношению

$$F_*'(s_c) = \frac{F_*(s_c) - F_*(s_1)}{s_c - s_1} \qquad (20.15)$$

Определение насыщенности на скачке по (20.15) допускает простую геометрическую интерпретацию: из точки абсциссы s_1 проводится касательная к графику $F_*(s)$ и точка касания проектируется на ось абсцисс; получится значение s_c с учётом сегрегации фаз.

Постановка задачи вытеснения нефти водой вертикально вниз с учётом сегрегации фаз имеет одну новую особенность. Дело в том, что нагнетается только вода и при малой интенсивности нагнетания полного вытеснения нефти до

значения s_2 может и не происходить. На входе в трубу обеспечивается условие не отрицательности скорости фильтрации нефти. Из (20.3) получаем для определения водонасыщенности на входе

$$\left[1-F(s)\right]v \geq v_g(s), \quad или \quad k_w(s) \leq \frac{v}{v_*}, \quad v_* = \frac{k\Delta\rho g}{\mu_w}. \qquad (20.16)$$

Для обеспечения условия (20.6) нужно поддерживать суммарную скорость фаз $v \geq v_* k_w(s_2)$, учитывая монотонный рост ОФП воды. Если же это условие не выполнено, то на входе водонасыщенность не достигнет значения s_2, вымывание нефти по длине трубки не будет как в горизонтальном случае, максимальная водонасыщенность не будет достигаться, вместо s_2 может быть достигнуто лишь меньшее значение $s_в$. На рис.20.3 показано определение насыщенности $s_в$ геометрическими построениями: отложив по оси ординат значение v/v_*, проводим прямую, параллельную оси водонасыщенности до пересечения с ОФП воды. Полученную точку проецируем на ось водонасыщенности. Если нет пересечения, то достигается s_2.

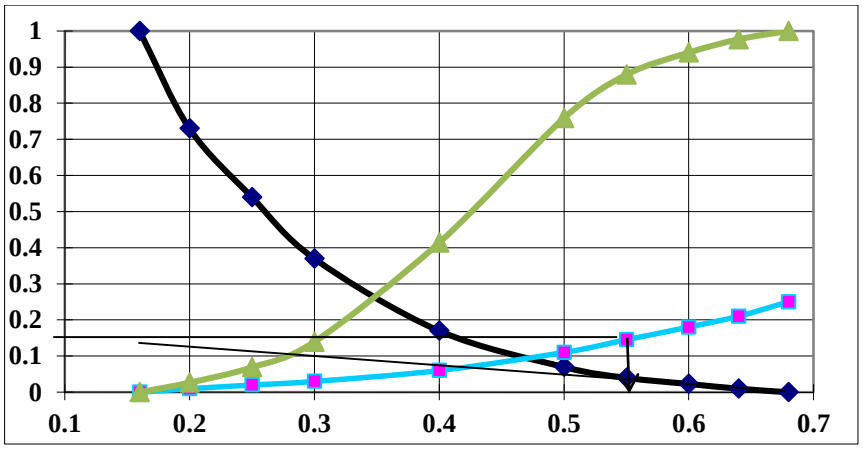


Рис. 20.3. Геометрическое определение снижения максимально возможной насыщенности при вытеснении нефти вертикально вниз для v/v_*=0.15.

Вытеснение вниз под углом к вертикали.

Пусть насыщенный нефтью однородный образец длины l расположен под некоторым углом α к вертикальной оси Oz, направленной вниз, и вытеснение нефти производится

нагнетанием воды в одном из его концов, помещенном в начале координат. Расход воды будем считать постоянным, упругими явлениями и сжимаемостью жидкостей и породы пренебрегаем, так что суммарная скорость фильтрации по образцу поддерживается постоянной.

Направим ось $O\xi$ по направлению образца под углом α к оси Oz. Начальную водонасыщенность примем равной связанной s_1, в точке нагнетания у входа в трубку доля воды равна 1. Математическая постановка задачи имеет вид

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\left[vF'(s)+v_g'(s)\right]\frac{\partial s}{\partial \xi}=0,\quad s(\xi,0)=s_1,\quad F\left(s(0,t)\right)=1. \qquad (20.17)$$

Обычно в точке нагнетания ставится условие равенства водонасыщенности своему максимальному значению s_2, но в нашей задаче из-за действия сил тяжести, максимальное значение водонасыщенности может и не достигаться.

Скорость гравитационной сегрегации v_g несколько отличается от той, что была введена для вертикального вниз вытеснения. В (20.4) множителем появляется cosα

$$v_g(s)=\frac{\Delta\rho\, g\cos\alpha}{\dfrac{\mu_в}{k_в(s)}+\dfrac{\mu_н}{k_н(s)}},\quad \Delta\rho=\rho_в-\rho_н \qquad (20.18)$$

Скачок насыщенности s_c найдется как решение (20.15).

Если скачок насыщенности отсутствует, то следует положить $s_c=s_1$. Формально решение задачи (20.17) имеет вид: в нефтяной зоне; в зоне совместного движения; в вымытой зоне

$$\begin{aligned} &s=s_1,\quad \xi>v_ct,\quad v_c=\left[vF'(s_c)+v_g'(s_c)\right]/m\\ &vF'(s)+v_g'(s)=m\xi/t,\quad v_вt<\xi<v_ct \qquad (20.19)\\ &s=s_2^*,\quad \xi<v_вt,\quad v_в=\left[vF'(s_2^*)+v_g'(s_2^*)\right]/m \end{aligned}$$

С изменением угла α меняются $v_g'(s)$, v_c и $v_в$, причем на фронте вымывания значение насыщенности может быть и менее, $s_в\le s_2$. Но для случая вытеснения вверх всегда $s_в=s_2$, тогда как для вытеснения вниз при малых темпах нагнетания может наблюдаться случай $s_в \le s_2$.

С точки зрения разработки залежи наибольший интерес представляет определение общего критерия поршневого режима вытеснения нефти водой с учетом влияния силы

тяжести, и обусловленного этим влиянием гравитационной сегрегации. Такой критерий может быть получен в самой общей форме, если кривая относительной фазовой проницаемости нефти подходит к оси насыщенностей под некоторым конечным углом. Если же кривая относительной фазовой проницаемости нефти касается оси насыщенностей, как это имеет место для употребляемых часто степенных относительных фазовых проницаемостей, такой критерий может быть принят лишь условно.

Очевидно, поршневой режим реализуется в тех случаях, когда значение насыщенности на фронте вытеснения равно максимальной водонасыщенности. Это может иметь место в двух случаях: либо, когда насыщенность на скачке становится равной максимальной водонасыщенности, либо, когда фронт вымывания с насыщенностью s_2 перегоняет фронт вытеснения с насыщенностью s_c. При графическом определении скачка насыщенности в случае поршневого режима точка касания вырождается и превращается в точку “опоры”.

Условие поршневого вытеснения представится в виде

$$F_*'(s_2) \geq \frac{1}{s_2 - s_1}, \qquad (20.20)$$

в этом случае точка касания к графику функции $F_*(s)$ переходит в конечную точку $(s_2,1)$.

Условие (20.20), после ряда аналитических выкладок, можно преобразовать к более простому виду для случая произвольного направления вытеснения, если ввести обозначения $A=k_w(s_2)$, $B=(s_2-s_1)tg\gamma$, γ - угол касательной к кривой $k_o(s)$ в точке s_2. Тогда условие поршневого вытеснения вниз по трубке с углом наклона α к вертикали принимает вид неравенства

$$\frac{\mu_w}{\mu_o} \geq \frac{A}{B} + \frac{Ak\Delta\rho g\cos\alpha}{\mu_o v} \qquad (20.21)$$

где k-абсолютная проницаемость по нефти при наличии связанной воды, v - поддерживаемая при вытеснении суммарная скорость фильтрации фаз.

Согласно данным экспериментов на кернах фундамента фазовые проницаемости таковы, что отношение $A/B = 1.2 \div 1.6$. Отношение же вязкостей $\mu = 0.55$. Число A невелико, оно в

интервале 0.2 ÷ 0.4. Применительно к залежи для вертикального вытеснения (α=0) вниз критерий (20.21) ориентировочно дает для поддерживаемой скорости фильтрации $v > (0.2 \div 0.5)k$ м/год, где k - в мД. Для средней проницаемости фундамента в 50 мД это означает, что вертикальные скорости фильтрации желательно поддерживать более 1-2.5 метров в год.

Нефтеотдача и обводнённость.

Приведенное выше решение может быть использованы для вычисления нефтеотдачи с учетом сегрегации. Приводим результат для безводной нефтеотдачи (до прорыва воды)

$$\eta_0 = \frac{1}{(1-s_1)F_*'(s_c)}. \qquad (20.22)$$

Здесь водонасыщенности: s_1 – связанная; s_c - на скачке; $F_*(s)$ – доля воды, учитывающая поправку на гравитацию.

Приведём также формулу нефтеотдачи на момент подхода водонасыщенности s к выходу из образца

$$\eta = \frac{1}{1-s_1}\left\{ s - s_1 + \frac{1-F_*(s)}{F_*'(s_c)} \right\}. \qquad (20.23)$$

До подхода фронта вытеснения обводнённость равна нулю. После подхода фронта она становится больше нуля и с течением времени возрастает до 1. Если фронт вытеснения несет на себе скачок насыщенности, то обводнённость возрастает сразу на некоторую величину. Если вытеснение происходит без скачка насыщенности, то изменение её происходит плавно.

Долю нефти в потоке обозначим буквой ζ. Как было отмечено $\zeta=1-F_*(s)$. Присоединим к этому соотношению решение (20.19), положив $\xi=l$ или $\xi = 0$. Получим уравнения

$$F_*'(s) = \frac{ml}{vt} \quad и \quad F_*'(s) = 0. \qquad (20.23)$$

Эти две формулы дают возможность долю воды в потоке выразить как функцию времени. Удобно в качестве безразмерного времени ввести отношение

$$\tau = \frac{vt}{ml}. \qquad (20.24)$$

Безразмерное время подхода фронта вытеснения найдется по одной из формул

$$\tau_c = \min\left(\frac{1}{F_*'(s_c)}, \frac{1}{F_*'(s_в)}\right). \qquad (20.25)$$

Безразмерное время полного вымывания нефти из модели

$$\tau_в = \frac{1}{F_*'(s_в)}. \qquad (20.26)$$

Это время конечно, если движется фронт вымывания (полного вытеснения), т.е. $F'_*(s_2)>0$, и оно бесконечно, если не движется фронт вымывания, т.е. $F'_*(s_2) = 0$. Доля нефти в фильтрационном потоке составит: $\zeta = 1$, если $\tau < \tau_c$; и $\zeta = \mathbf{1} - F_*(s)$, если $\tau_c < \tau < \tau_в$.

Кривые вытеснения и долю нефти в потоке как функции безразмерного времени или прокачанного объёма удаётся получить и проанализировать для ряда конкретных видов ОФП нефти и воды. В таблице 20.1 представлены основные показатели вытеснения в зависимости от параметра $a=v_*/v$. Буквой v_* обозначена скорость (20.16) фильтрации воды под действием силы тяжести, v есть поддерживаемая скорость фильтрации в трубке, набитой керном. ОФП брались те, которые были заложены в гидродинамическую модель (IMEX) залежи фундамента Белого Тигра.

Таблица 20.1. Показатели вертикального вытеснения нефти водой для отношения вязкостей μ=0.5.

a	5	2	0	-1	-2
s_c	0.423	0.468	0.503	0.523	0.548
η_o	0.362	0.461	0.525	0.561	0.604
τ_o	0.304	0.388	0.441	0.471	0.507
s_k	0.453	0.561	0.623	0.638	0.643
η_k	0.373	0.542	0.604	0.605	0.605

Как видно из таблицы, при вытеснении вниз по вертикали при больших значениях a показатели вытеснения снижаются существенно. При a=-2 (вытеснение вверх) безводная нефтеотдача и конечная нефтеотдача совпадают, что говорит о поршневом характере вытеснения. Вытеснение вниз при a=5 даёт значительное снижение как безводной, так и конечной нефтеотдачи. Из таблицы также видно (случай a=-1), что и при

вертикальном вверх вытеснении безводная нефтеотдача может быть существенно ниже конечной нефтеотдачи.

Лекция 21

Капиллярное взаимодействие жидкостей в пористой среде.

Поверхностное натяжение. Свойство смачивания. Угол смачивания. Капиллярный подъём смачивающей фазы. Моделирование подъёма как пример движения тела переменной массы. Зависимость капиллярного давления от насыщенности смачивающей фазы. Функция Леверетта. Установившееся распределение капиллярно поднятой воды. Введение капиллярного давления с позиций механики. Задача вытеснения нефти водой и оценки значения связанной воды.

Поверхностное натяжение жидкости.

Каждая молекула на границе жидкой капли притягивается молекулами, находящимися внутри капли. В результате появляется напряжение на поверхности, направленное вглубь жидкости перпендикулярно к поверхности жидкости. Оно и создаёт капиллярный скачок давления при переходе внутрь капли. Силы, действующие на молекулу на достаточном удалении от поверхности со стороны других молекул, взаимно скомпенсированы. Чтобы вытащить молекулу из глубины жидкости к поверхности надо затратить определённую работу. Поэтому молекулы поверхностного слоя обладают избыточной по сравнению с молекулами внутри жидкости потенциальной энергией. Размеры капель намного превышают размер молекул и межмолекулярного расстояния, потому можно считать, что толщина поверхностного слоя, на котором действует поверхностное натяжение, пренебрежимо мала (в практических расчётах она принимается равной нулю).

Разрежем сферическую каплю радиуса R на две равные половинки. Каждая из них должна находиться в равновесии под действием сил поверхностного натяжения, приложенных к границе разреза, и сил избыточного капиллярного давления, действующих на площадь поверхности и площадь поперечного сечения. Обозначим буквой σ силу поверхностного натяжения на единицу длины дуги большого круга, тогда сумма поверхностных сил составит $2\pi R\cdot\sigma$. Эта сила направлена перпендикулярно диаметральному сечению в сторону рассматриваемой половинки капли. Уравновешивается

она поверхностной силой, действующей на диаметральное сечение капли, равной капиллярному давлению, помноженному на площадь диаметрального сечения, $p_k \cdot \pi R^2$. Приравняв, имеем

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} \qquad (21.1)$$

Например, при температуре 20°С для воды в воздухе σ=72.5 мН/м. Для капли радиусом в 1 мм капиллярное давление составит 145 Па, а для капель с характерным поровым радиусом в 10 мкм оно уже сравнимо с атмосферным давлением - 14500 Па≈0.14 атм.

Капиллярные явления связаны с таким понятием, как смачивание. Если силы взаимодействия молекул жидкости и молекул твердого тела больше, чем силы взаимодействия молекул самой жидкости, мы говорим, что жидкость смачивает твердые тела. Наглядным признаком смачивания является "краевой угол". Если он меньше 90 градусов, то мы имеем дело со смачиванием. И наоборот. Если силы взаимодействия между молекулами жидкости превосходят силы их взаимодействия с молекулами твердого тела, то краевой угол θ оказывается тупым. В этом случае говорят, что жидкость не смачивает поверхность твердого тела. При полном смачивании θ= 0, при полном не смачивании θ=180°.

Капиллярными явлениями называют подъем или опускание жидкости в трубках малого диаметра – капиллярах. Смачивающая жидкость поднимается по капиллярам, пока высота подъёма не уравновесит действие силы смачивания. Не смачивающаяся жидкость – опускается, причём потерянный столб определяется силой поверхностного натяжения.

Поверхностное натяжение есть сила, отнесенная к единице длины контура, ограничивающего поверхность раздела фаз (размерность Н/м); она действует по касательной к поверхности и перпендикулярно контуру поверхности, препятствует самопроизвольному увеличению площади поверхности. Поверхностное натяжение различных жидкостей на границе с собственным паром изменяется в широких пределах: от единиц для сжиженных низкокипящих газов, до нескольких тысяч мН/м для расплавленных тугоплавких веществ. Поверхностное натяжение зависит от температуры.

Для многих жидкостей вдали от критической температуры можно принять линейную зависимость

$$\sigma = \sigma_o - \alpha\left(T - T_0\right), \qquad (21.2)$$

где σ и σ_0 – поверхностное натяжение при температурах T и T_0 соответственно, α≈0,1 мН/(м·К) – температурный коэффициент поверхностного натяжения.

Поверхностное натяжение измерено для многих чистых веществ и смесей (растворов, расплавов) в широком интервале температур и составов. Поверхностное натяжение весьма чувствительно к наличию примесей, измерения разными методиками не всегда дают совпадающие значения. Основные методы измерения следующие: по высоте подъема смачивающих жидкостей в капиллярах $h = 2\sigma cos\theta/\Delta\rho gR$; методом взвешивания капель; методом отрыва кольца; методом сидячей капли; методом вращающейся капли.

Таблица 21.1. Поверхностное натяжение некоторых жидкостей.

Жидкость	Температура, °С	Поверхностное натяжение, мН/м
Жидкий гелий	-269	0.12
Жидкий водород	-253	2.1
Вода	20	72.5
Раствор мыла в воде	20	40
Спирт	20	22
Эфир	25	17
Ртуть	20	470
Золото	1130	1102

Метод взвешивания капель прост и состоит в следующем: из пипетки, расположенной вертикально отверстием вниз медленно выдавливаются капли, измеряя при этом радиус шейки капли в момент отрыва. По числу капель и общему их весу определяем средний вес капли. По всем замерам выводим среднее значение радиуса шейки r. Приравнивая силу поверхностного натяжения $2\pi r\sigma$ весу капли mg находим среднее значение σ.

Наблюдения показывают, что форма капли зависит от угла смачивания θ. При полном смачивании, когда $\theta = 0$,

образования капли не происходит, жидкость полностью растекается по поверхности. При полном не смачивании, когда θ составляет 180°, по визуальным наблюдениям образуются мелкие шарики. Капли жидкости могут быть и достаточно крупными, обычные размеры составляют от нескольких микрон (конденсировавшиеся частицы пара) и до 2-3 мм. Интересна геометрическая форма сидячих и висячих капель, они описываются дифференциальными уравнениями и могут быть рассчитаны.

Определение поверхностного натяжения смачивающейся жидкости по высоте подъёма требует одновременного визуального определения угла смачивания. Однако применение к поровым каналам и нестационарным условиям движения в пористых средах осложняется несколькими причинами. Поры не имеют круглой формы, размеры пор претерпевают существенные изменения в ходе движения жидкости. Краевой угол смачивания θ зависит от скорости движения границы двух жидкостей. На начальном этапе заполнения капилляра угол θ имеет большие значения даже при полном смачивании водой стенок капилляра. Моделирование движения границы раздела в пористой среде в силу указанных причин вызывает определённые трудности. Конечное положение определяется точно.

Капиллярный подъём смачивающейся фазы жидкости.

Рассмотрим возможную модель динамики подъёма жидкости по капилляру. Будем полагать, что на столбик жидкости действует сила капиллярного натяжения на границе подъёма столбика, сила тяжести столбика и сила касательного напряжения на поверхности стенки столбика. Эти силы выразим соответственно формулами: поверхностное натяжение $2\pi R\sigma\cos\theta$ действует вверх; сила тяжести $\pi R^2 h\cdot\rho g$ действует вниз; сила вязкого трения по всей стенке столбика $2\pi Rh\cdot\tau_0$ действует вниз. Касательное напряжение на стенке определяем из предположения ламинарного установившегося режима согласно определению вязкости жидкости. Поскольку профиль скорости по сечению имеет параболический вид, то максимальная осевая скорость в 2 раза больше средней скорости по капилляру $\dot{h}(t)$, то радиальный градиент роста

скорости по сечению у стенки составит $4\dot{h}/R$, а для касательного напряжения на стенке получится $\tau_0 = 4\mu\dot{h}/R$.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для высоты подъёма по капилляру, надо учесть ещё, что движущаяся масса является переменной, уравнение следует вывести из теоремы об изменении количества движения механической системы. А именно, дифференциал количества движения столбика жидкости должен быть равен суммарному импульсу сил за время dt. Приравнивая, имеем

$$d\left(\pi\rho R^2 h\cdot\dot{h}\right)=\left\{2\pi R\sigma\cos\theta-\pi R^2 h\cdot\rho g-8\pi\mu h\dot{h}\right\}\cdot dt \qquad (21.3)$$

Упрощения приводят к нелинейному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dt}\left(h\dot{h}\right)+\frac{8\mu}{\rho R^2}\cdot h\dot{h}+gh=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho R} \qquad (21.4)$$

Решение этого уравнения с начальными условиями $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ и определит зависимость высоты подъёма от времени.

Исследованиями было выяснено, что краевой угол смачивания θ зависит от скорости $\dot{h}$. Современные математические пакеты позволяют учесть такого рода зависимости и получить иллюстрацию решения. Но в целях упрощения изложения, примем θ за постоянную величину и продемонстрируем применение пакета Mathcad для получения разнообразия форм графиков $h(t)$.

Если ввести безразмерные переменные согласно формулам

$$t=t_0\tau,\quad h=h_0\eta,\quad t_0=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{\sigma\cos\theta}{\rho R}},\quad h_0=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},\quad \mathrm{E}=\eta^2, \qquad (21.5)$$

то задача сводится к известному виду с одним параметром $\bar{\mu}$

$$\ddot{\mathrm{E}}+\bar{\mu}\dot{\mathrm{E}}+\sqrt{\mathrm{E}}=1,\quad \mathrm{E}(0)=\dot{\mathrm{E}}(0)=0,\quad \eta=\sqrt{\mathrm{E}},\quad \bar{\mu}=\frac{8\mu t_0}{\rho R^2}. \qquad (21.6)$$

Для решения сначала выясняем интервалы параметра задачи $\bar{\mu}$. Видно, что радиус капилляра R входит в знаменатель выражения $\bar{\mu}$ в степени 2.5, что свидетельствует о резком возрастании этого параметра с уменьшением R. Для капилляров в 100 микрон при полном смачивании водой характерное время t_0 составляет примерно 0.085 секунд, а параметр $\bar{\mu} = 68$, что достаточно велико. Характерный интервал

параметра $\bar{\mu}$ от 10 до 1000 и более с уменьшением радиуса капилляра.

Для получения иллюстраций обращаемся к блоку Given/Odesolve пакета Mathcad. Для решений, зависящих от значения параметра $\bar{\mu}$, блок показан ниже:

Given

$E''(t) + \mu \cdot E'(t) + \sqrt{E(t)} = 1$

$E(0) = 0$

$E'(0) = 0$

$E(\mu) := \text{Odesolve}(t, 1000)$

$E0 := E(50) \qquad E1 := E(100) \qquad E2 := E(200)$

$i := 0..1000$

$h0_i := \sqrt{E0(i)} \qquad h1_i := \sqrt{E1(i)} \qquad h2_i := \sqrt{E2(i)}$

На рис. 21.1 приведены графики $h0(t), h1(t)$ и $h2(t)$ для трех значений параметра $\bar{\mu}$, равных 50, 100 и 200 соответственно.

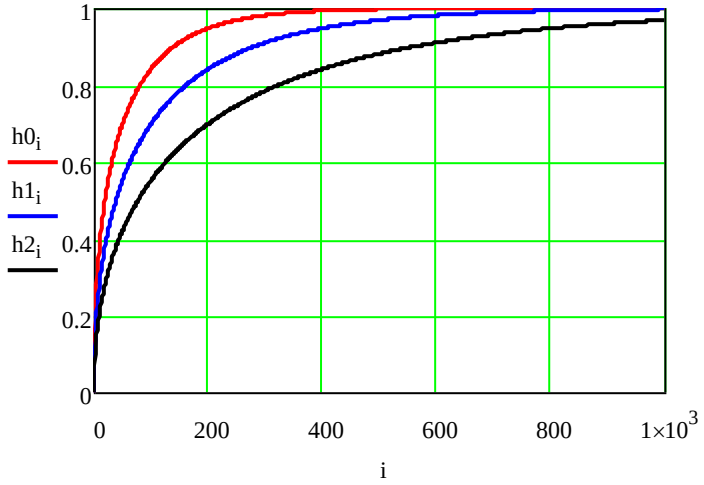


Рис. 21.1. Графики для функций $h(t)$ капиллярного подъёма. Верхняя линия - для $\bar{\mu} = 50$, нижняя - $\bar{\mu} = 200$.

Рассмотренная задача интересна тем, что здесь приходится обращаться к динамике тела переменной массы. Можно ставить под некоторое сомнение динамику подъёма по капилляру, поскольку угол смачивания может зависеть от скорости подъёма, но установившееся предельное значение высоты жидкости по капилляру – несомненно. Решённая задача даёт также некоторое представление о времени подъёма, оно измеряется в тысячах t_0. Выбор t_0 произведён без участия

вязкости, и приведённые выше графики определяют полностью влияние вязкости. Видно, что с ростом вязкости замедляется процесс подъёма жидкости по капиллярам, предельное же значение не зависит от значения вязкости жидкости в указанной постановке постоянства угла смачивания.

Установившееся распределение капиллярно поднятой воды.

Уровень грунтовых вод определяют как глубину 100% -го насыщения пор водой. Но по поровым каналам из-за смачивания скелетом породы вода поднимается выше по мелким порам. В зависимости от радиусов пор поднятие может быть различным. Чем мельче пора, тем выше в ней подъём. На разных высотах выше уровня грунтовых вод только часть пор будет содержать воду, другая часть пор будет содержать почвенный воздух. Выше уровня грунтовых вод образуется слой грунта, содержащий воду лишь частично, причём в более мелких порах. Доля воды в порах зависит от распределения пор грунта по размерам, и различно для различных грунтов. Поры диаметром менее 0.1 мкм должны выделяться в особую группу субкапиллярных пор. Эти поры при взаимодействии воды с грунтом нацело заполняются связанной водой, и передвижение капиллярной воды в них не происходит. Движение возможно лишь в порах диаметром крупнее 0.1 мкм.

Высота капиллярного поднятия в среднезернистых песках равна 0.15—0.35 м, в мелкозернистых 0.35—1.0 м, в супесях она возрастает до 1—1.5 м, в суглинках — до 3—4 м. В глинах капиллярная вода может подниматься на высоту до 8 м. Капиллярное поднятие воды в грунтах зависит также от первоначального состояния их увлажнения. Установлено, в частности, что сухие пески обладают меньшим капиллярным подъёмом по сравнению с влажными песками. Высота капиллярного поднятия во влажном грунте в 3-4 раза больше, чем в сухом грунте. Это различие может быть объяснено неодинаковым смачиванием влажных и сухих частиц грунтов. На высоту и скорость капиллярного поднятия также влияет химический состав воды. Присутствие в воде различных солей может увеличивать или, наоборот, уменьшать высоту капиллярного поднятия. Замечено, что в грунтах при капиллярной пропитке одни соли поднимаются на большую

высоту, чем другие. В нижней части преобладают сульфаты, а в верхней — хлориды.

Зададимся некоторым законом распределения пор по радиусу и определим возможное содержание влаги по высоте от уровня грунтовых вод. Примем радиусы капилляров распределёнными по логнормальному закону, среднее логарифмическое значение радиуса обозначим r_0, оно не равно среднему арифметическому значению. Разброс логарифма отношения радиусов капилляров к r_0 характеризует безразмерный параметр δ, аналог среднеквадратичного отклонения. Примем, что вода полностью смачивает породу (угол θ равен нулю), σ=72,5 мН/м. Высота подъёма воды по капилляру радиуса r составит $z = 2\sigma/\rho g r$, а относительное содержание воды на уровне z найдётся интегрированием площадей сечений по той части капилляров, для которых радиусы окажутся меньше $R(z) = 2\sigma/\rho g z$. Капиллярная насыщенность водой представится интегралом плотности вероятности

$$s(z) = \frac{\int_0^{R(z)} r^2 f(r) dr}{\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr}, \quad R(z) = \frac{2\sigma}{\rho g z}, \quad f(r) = \frac{1}{\delta r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2(r/r_0)}{2\delta^2}}. \qquad (21.7)$$

В знаменателе интеграл берётся, его значение составляет

$$\int_0^{\infty} r^2 f(r) dr = r_0^2 e^{2\delta^2}, \quad r_{cp} = \int_0^{\infty} r f(r) dr = r_0 e^{-\frac{\delta^2}{2}}. \qquad (21.8)$$

Интегрирование в числителе также может быть проведено и результат сведён к вычислению через стандартные функции. Линейные размеры лучше выразить в долях от r_0. Производя интегрирование по безразмерной переменной r/r_0, а затем ещё преобразованиями переменной, для функции $s(z)$ получаем выражение

$$s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{\ln(h_0/z)}{\delta\sqrt{2}} - \delta\sqrt{2}\right), \quad h_0 = \frac{2\sigma}{\rho g r_0}. \qquad (21.9)$$

Здесь h_0 представляет собой поднятие по капилляру радиуса r_0, функция erf рассматривается как нечётная, вычисляемая и для отрицательного аргумента. Если значение параметра δ мало, то снижение насыщенности грунта влагой на

границе грунтовых вод займёт незначительный слой. Если взять фиксированное значение δ, то для вычисления различных вариантов один параметр – среднее значение радиуса пор. На рис. 21.2 приведены графики зависимости капиллярной насыщенности водой для воображаемой пористой среды, составленной из вертикальных капилляров, распределённых по логнормальному закону при $h_0 = 1$ м для значений $\delta = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7$.

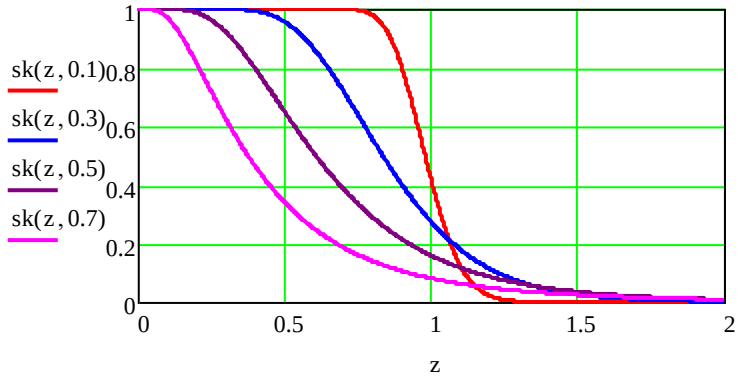


Рис. 21.2. Характерные кривые капиллярного насыщения выше уровня грунтовых вод при логнормальном распределении радиусов капилляров для ряда значений δ.

Как видно из рисунка, высота капиллярного поднятия в пористой среде сохраняет смысл лишь при малых значениях параметра дисперсности δ. С ростом этого параметра поднятие размазывается, а при $\delta > 1$ вообще теряет смысл. Для капель воды в атмосфере то же имеет место логнормальное распределение, по статистически замеренным данным значение параметра дисперсности близко к 1/3.

В реальных пористых средах поровые каналы имеют некруглые формы, что то же может добавить высоту подъёма. Для вертикальных цилиндрических каналов различных форм условие статического равновесия столба жидкости под действием силы тяжести и поверхностного натяжения имеет вид равенства $h \cdot S\rho g = L \cdot \sigma \cos\theta$, откуда для эквивалентного круглого капилляра получаем формулу радиуса

$$r_{экв} = \frac{2S}{L}, \quad h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r_{экв}}. \qquad (21.10)$$

Например, для равностороннего треугольника со стороной a эквивалентный радиус равен радиусу вписанного в

треугольник круга, т.е. $\frac{a\sqrt{3}}{6} = 0.29a$, угловые области как бы не влияют на подъём. В случае сечения в виде криволинейного равностороннего треугольника, образованного внутри касающихся друг друга трёх кругов одинакового радиуса R, эквивалентный радиус есть $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1\right)R = 0.103R$. За радиус поровых каналов при капиллярной пропитке можно принять примерно десятую часть радиусов зёрен песчаника.

Возможны ещё и гистерезисные явления при капиллярном подъёме и опускании уровня грунтовых вод. Это может быть связано с наличием интервалов сужения и расширения поперечных сечений поровых каналов. Всё это ставит под сомнение результаты проводимых расчётов. Однако практические потребности проектирования заставляет искать всё новые и новые способы описаний фильтрации жидкостей.

Функция Леверетта.

Леверетт предложил для каждой пористой среды вводить экспериментально определяемую функцию, которая зависит от водонасыщенности и даёт поправку к давлению в жидкости, обусловленную действием сил смачивания. Поправка называется просто капиллярным давлением, вместо радиуса порового канала здесь фигурирует квадратный корень отношения проницаемости к пористости, а численный множитель отсутствует

$$p_k(s) = \frac{\sigma \cos\theta}{\sqrt{k/m}} J(s) \qquad (21.11)$$

Этот подход принят научно-техническим сообществом, функция $J(s)$ носит название функции Леверетта и определяется по керновому материалу. Обработка многочисленного экспериментального материала показала, что вязкость и плотность жидкости не влияют на капиллярное давление. Опыты также показали, что нет однозначности в определении $J(s)$, при пропитке и дренировании эта функция имеет разные значения.

Свяжем функцию Леверетта с пропиткой водой пористого образца. Пусть образец пористой среды смачиваемый, и он соприкасается с водной поверхностью достаточно длительное время. Силы смачивания способствуют подъёму воды вверх по

поровым каналам, по разному для поровых каналов разного радиуса. По вертикали устанавливается некоторое распределение насыщенности водой. Оно должно быть таково, чтобы капиллярный скачок на выбранной высоте z уравновешивал тяжесть поднятой воды, т.е. должно быть выполнено условие равенства капиллярного скачка дополнительной тяжести

$$p_k(s) = m\rho g\int_0^z s(z)dz, \quad J(s) = \frac{\rho g\sqrt{mk}}{\sigma\cos\theta}\int_0^z s(z)dz. \qquad (21.12)$$

Видно, что $J(s)$ определяется по замеренным значениям водонасыщенности. Можно из этого же уравнения определить ожидаемое распределение насыщенности водой по вертикали, если известна функция Леверетта для подобного же образца.

В практике добычи нефти приходится иметь дело с пропиткой водой насыщенных нефтью образцов. Приведённые выше формулы (21.10-19.12) остаются в силе при условии, что вместо плотности воды берётся разность плотностей воды и нефти. Поверхностное натяжение следует брать для границы воды с нефтью - около 0.024 Н/м. Что касается угла смачивания θ, то его значения имеют значительный разброс, для залежи фундамента Белого Тигра СРВ принималось θ=74°.

Введение капиллярного давления с позиций механики.

При фильтрации в пористой среде двух жидкостей силы смачивания сказываются в том, что фильтрация происходит не только под действием градиента давления, но и из-за наличия градиента насыщенности смачивающей жидкости. Естественно считать, что на жидкость действует одно значение давления, которое совпадает с замеренным в эксперименте давлением. Оно, как и в случае однородной среды, представляет собой отношение поверхностной силы к площади просветов на срезе элемента пористой среды.

При фильтрации двух несмешивающихся жидкостей скорости каждой из фаз зависят не только от градиента давления, но ещё от градиента насыщенности смачивающей фазы. Представим закон фильтрации двух фаз в линейной форме

$$\vec{v}_в = -A\nabla p - B\nabla s, \quad \vec{v}_н = -C\nabla p + D\nabla s. \qquad (21.13)$$

Знаки здесь подобраны так, чтобы коэффициенты были положительными в случае смачивания водой поровой поверхности пласта. Из уравнения неразрывности в случае отсутствия градиента давления и не сжимаемости фаз следует, что

$$div\left(B-D\right)\nabla s=0, \tag{21.14}$$

что возможно только при $B=D$. Коэффициенты A и C вводились при определении относительных фазовых проницаемостей, поэтому обобщение закона Дарси на двухфазную фильтрацию с учётом смачивания можно принять в виде

$$\vec{v}_в=-k\frac{k_в}{\mu_в}\nabla p-B\nabla s,\quad \vec{v}_н=-k\frac{k_н}{\mu_н}\nabla p+B\nabla s. \tag{21.15}$$

Оставшийся неизвестным коэффициент B зависит от проницаемости пористой среды, вязкости фазы и её смачивания породой, а также насыщенности водой s. При значениях насыщенности водой, равной максимальной и более, т.е. $s>s_2$, $B=0$. Это значит, что впитывание воды невозможно после достижения максимального значения водонасыщенности. Но при значениях водонасыщенности, меньших значения связанной воды, т.е. при $s<s_1$, впитывание воды возможно, и значения коэффициента B положительны, хотя градиент давления и не способен в этой области вызвать фильтрацию воды. При изменении водонасыщенности от s_1 до s_2 функция $B(s)$ должно монотонно убывать до нуля.

Сведём (21.15) к обычно применяемой форме записи введением давлений в каждой из фаз – для воды и для нефти. Пусть

$$p_в=p+\frac{\mu_в}{k}\int\frac{B(s)}{k_в(s)}ds,\quad p_н=p-\frac{\mu_н}{k}\int\frac{B(s)}{k_н(s)}ds, \tag{21.16}$$

Давления в водной и нефтяной фазе определятся по этим формулам лишь с точностью до констант интегрирования. Для разности давлений в фазах – капиллярного давления - имеем

$$p_k=p_в-p_н=-\frac{1}{k}\int\left(\frac{\mu_в}{k_в}+\frac{\mu_н}{k_н}\right)Bds,\quad B=-k\frac{k_в k_н}{\mu_в k_н+\mu_н k_в}\frac{dp}{ds}. \tag{21.17}$$

Гипотеза (21.15) оправдывает с позиций механики сплошной среды введение капиллярного давления и функции Леверетта.

Лекция 22

Трехмерная установившаяся фильтрация в пласте большой толщины.

Приток к сферической скважине в однородном бесконечном пласте. Сферический сток и источник. Моделирование притока нефти к интервалу перфорации. Приток к эллипсоиду вращения. Сравнение формул для притока. Взаимовлияние дебитов скважин. Вертикальное и горизонтальное расположение интервалов притока и закачки. Случай достаточно мощного, но ограниченного по толщине пласта.

Пространственные фильтрационные течения.

В массивной залежи фильтрация носит большей частью трехмерный характер. При мощности в 100 м и более, и интервалах притока скважин в несколько метров, течение на расстояниях десятки метров от скважины имеет сферическую асимптотику, становясь осесимметричным лишь в самой близи ствола скважины. Для пластов платформенного типа обычно пластовое давление и составляющую скорости по напластованию усредняют поперек пласта, и течение рассматривают как двумерное, а вблизи скважин как одномерное и осесимметричное. Для мощных залежей, когда размеры водоносной толщи сопоставимы с расстояниями между скважинами, двумерный подход непригоден. Все широко употребляемые результаты, полученные для двумерного течения в пластах платформенного типа, должны быть пересматриваться в случае мощных залежей.

В двумерном случае характерен логарифмический профиль изменения пластового давления вблизи скважины. В трехмерном случае с удалением от скважины профиль пластового давления приобретает гиперболическую асимптотику. Разница между предельным и текущим значениями давлений обратно пропорциональна расстоянию от скважины.

Для наклонных и горизонтальных скважин и вовсе непригодны никакие двумерные приближения. В частности, теряет силу и общеизвестная формула Дюпюи для определения дебита по известной депрессии.

Ниже ставится и решается задача выбора формулы для дебита скважины и интенсивности локального притока для однородной и неограниченной залежи. Сначала рассматривается приток к скважине со сферическим забоем. На базе полученного решения, используя принцип суперпозиции, рассматриваются общие случаи. Приводится решение задачи о притоке к поверхности эллипсоида вращения в неограниченном по мощности и простиранию пласте.

Приток к сферической скважине.

Пусть приточная часть скважины представляет собой сферу радиуса R с центром в начале координат. На поверхности притока $x^2+y^2+z^2=R^2$ поддерживается постоянное забойное давление p_c, меньшее пластового давления p_∞. Залежь однородна и бесконечна, проницаемость k везде одинакова, жидкость однородна и имеет постоянное значение вязкости μ. Пользуясь сферической симметрией течения, при дебите скважины Q, для скорости фильтрации v будем иметь

$$v = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad (22.1)$$

Свяжем эту скорость, имеющую отрицательный знак в случае притока, с градиентом давления согласно линейному закону Дарси

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dr} \qquad (22.2)$$

Интегрируя по радиусу r и учитывая, что при $r\to\infty$ $p\to p_\infty$, получаем для распределения давления в залежи формулу

$$p = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k}\cdot\frac{1}{r} \qquad (22.3)$$

Используем теперь значение забойного давления p_c, при $r=R$ очевидно должно $p= p_c$. Тогда из предыдущего уравнения получаем формулу дебита сферической скважины

$$Q = \frac{4\pi kR}{\mu}(p_\infty - p_c) \qquad (22.4)$$

Это и есть аналог формулы Дюпюи для трехмерного сферического течения. Она отличается отсутствием логарифмического множителя в знаменателе. Из формулы (22.3) следует, что воронка депрессии в сферическом случае

имеет характер *1/r*, тогда как в плоском случае воронка депрессии носила логарифмический характер. Это значит, что влияние скважины в сферическом случае распространяется на значительно меньшие расстояния, нежели в плоском случае осевой симметрии.

Для сопоставлений выпишем формулы распределения давлений в обоих случаях. Для сферического случая распределение давления вдоль радиального направления меняется согласно

$$p = p_\infty - (p_\infty - p_c)\frac{R_c}{r} \qquad (22.5)$$

тогда как в осесимметричном плоском случае аналог данной формулы имеет вид

$$p = p_c + (p_k - p_c)\frac{\ln(r/R_c)}{\ln(R_k/R_c)} \qquad (22.6)$$

В качестве радиуса влияния скважины R_* введем расстояние, на котором перепад давления составляет 100(1-ε)% от общего перепада, т.е. $(p_k-p)=\varepsilon(p_k-p_c)$. Тогда для сферического и плоского случаев соответственно получим

$$R_* = R_c/\varepsilon\,, \quad R_* = R_c^{\varepsilon} R_k^{1-\varepsilon} \qquad (22.7)$$

Параметр ε примем равным 0.1. Это означает, что 90% от депрессии на пласт приходится на область влияния данной скважины. Примем для плоского случая радиус скважины равным 0.1 м, а радиус контура питания равным 400 м. По второй из формул (22.7) для радиуса влияния цилиндрической скважины имеем R_* =175м (воронка депрессии). В случае сферического течения радиус сферы определим из условия, чтобы поверхности притока в обоих случаях имели одинаковые значения. Тогда для радиуса эквивалентной сферической скважины получается значение R_c=0.453 м, а для области влияния, по первой из формул (22.7), R_* =4.53 м. Разница получилась весьма значительной, почти в 40 раз. Массивность залежи и трехмерность течения существенно влияют на фильтрационные характеристики. Особенно на расчёты, связанные с исследованием скважин. Воронка депрессии сферической скважины на порядок меньше.

Приток к интервалу перфорации вертикальной скважины.

Выпишем формулу дебита для вертикальной цилиндрической скважины в бесконечном, мощном однородном пласте с одним прямолинейным приточным интервалам $o<z<h$. Ось Oz направим вертикально вверх, другие оси Ox и Oy направим по горизонтали. Картина течения вблизи скважины осесимметрична, а вдали от скважины асимптотически переходит в сферическую симметрию.

Каждую малую часть скважины $d\xi$ (рис. 4.1) представим себе сферической скважиной малого радиуса. Плотность распределения дебитов по оси скважины обозначим $q(\xi)$, тогда дебит малой сферической скважины составит $q(\xi)d\xi$, и, суммируя по длине притока скважины распределения давления (22.3) для сферических скважин, можем записать для распределения пластового давления вокруг цилиндрической колонны выражение

$$p = p_\infty - \frac{\mu}{4\pi k}\int_0^h \frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-\xi)^2}} \qquad (22.8)$$

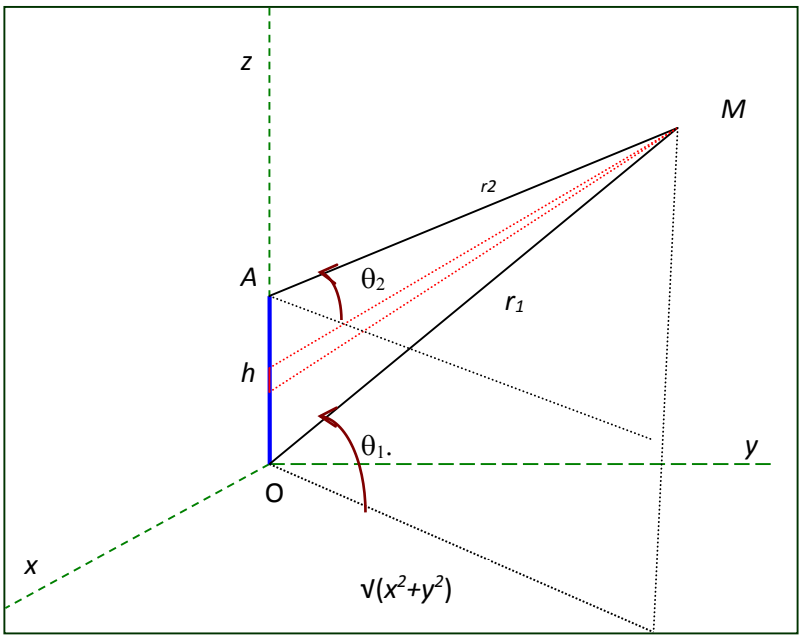


Рис. 4.1. К вычислению скорости фильтрации, индуцированной прямолинейным и вертикальным интервалом перфорации.

Интенсивность притока в скважину $q(\xi)$ может меняться вдоль скважины и формально интеграл (22.8) дает общее выражение для пластового давления (без учета статической составляющей) в любой точке коллектора и для любого

профиля притока вдоль интервала перфорации. Чтобы получить давление на поверхности скважины, достаточно произвести в этой формуле замену $x^2+y^2=R^2$, где R есть радиус скважины. Однако при этом на поверхности скважины давление будет иметь не одно и то же значение, а разное в разных точках z скважины. При $z=0$ получим одно значение, при $z=h/2$ другое, при $z=h$ третье.

Для некоторых случаев распределения притока $q(\xi)$ интеграл (22.8) вычисляется, и результат выражается через элементарные функции. Например, в случае равномерного притока, когда $q(\xi)=const=Q/h$, где Q есть дебит скважины, интеграл (22.8) легко берется, и мы получаем для давления в коллекторе

$$p = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k h} \ln \frac{h - z + \sqrt{x^2 + y^2 + (h-z)^2}}{-z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (22.9)$$

На поверхности скважины при $x^2+y^2=R^2$ имеем распределение давления, зависящее от координаты z

$$p_c = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k h} \ln \frac{h - z + \sqrt{R^2 + (h-z)^2}}{-z + \sqrt{R^2 + z^2}} \qquad (22.10)$$

Упростим это выражение, полагая радиус скважины очень малым по сравнению с интервалом притока к скважине h. Будем также полагать, что координата z удалена от концевых точек притока, так что $z>>R$, $h-z>>R$. Концевые эффекты рассмотрим чуть позже, отдельно. Освободившись от иррациональности в знаменателе (22.10) и полагая $R/h \to 0$ в числителе дроби, получаем зависимость давления на поверхности скважины от координаты z

$$p_c = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k h} \ln \frac{4z(h-z)}{R^2} = p_\infty - \frac{\mu Q}{2\pi k h} \ln \frac{2\sqrt{z(h-z)}}{R} \qquad (22.11)$$

Полученная формула показывает, что вдоль скважины забойное давление нужно считать переменным, если мы хотим иметь равномерный приток по интервалу. Логарифмический член вообще-то должен меняться слабо вдоль интервала. Значение его в середине интервала при $z=h/2$ составляет $ln(h/R)$, а формулу (22.11) можно рассматривать как переписанную в другом виде аналог формулы Дюпюи. Если за основное значение забойного давления принимать его

значение в середине интервала притока, для радиуса контура в массивной залежи надо брать длину интервала притока.

Мы получили уже довольно важный результат, который позволяет судить о возможных поправках к результатам исследований скважин: *в массивной залежи фундамента за радиус контура питания можно принять длину интервала притока скважины и ввести соответствующие уточнения в определения параметров по промысловым данным.*

Положив в (22.11) $z=\zeta h$, представим логарифмический член в удобном виде

$$\ln\frac{2\sqrt{z(h-z)}}{R}=\ln\frac{2h\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}{R}=\ln\frac{h}{R}+\ln\sqrt{4\zeta(1-\zeta)} \qquad (22.12)$$

Первый член в этом выражении для интервала перфорации порядка 100 м и радиуса скважины 0.1 м имеет значение 6.9. Для значений ζ=0.1, 0.2, 0.3, 0.4 и 0.5 добавочный член составляет –0.511, -0.233, -0.081, -0.020 и 0 соответственно.

Сосчитаем среднее по интервалу притока значение давления, согласно (22.11), интегрированием. Вычисления дают

$$p_{ср,заб}=p_\infty-\frac{\mu Q}{2\pi kh}\ln\frac{2h}{eR} \qquad (22.13)$$

Последняя формула может быть рекомендована для определения дебита скважины по депрессии в неограниченном по мощности пласте. Её можно написать аналогично широко известной формуле Дюпюи

$$Q=\frac{2\pi kh\Delta p}{\mu\ln(2h/eR)} \qquad (22.14)$$

Естественным образом уточнился и радиус контура питания. За таковой можно принять интервал притока h, помноженный на отношение $2/e$=0.736. Далее мы снова будем возвращаться к подобным вопросам, когда будет учитываться влияние кровли или подошвы на приток к скважине.

Рассмотрим теперь асимптотику вдали от скважины, когда $x^2+y^2\to\infty$. В целях сравнения с залежами платформенного типа ограничимся рассмотрением асимптотики для одной горизонтальной плоскости $z=h/2$. Из (22.9) имеем

$$p_c=p_\infty-\frac{\mu Q}{4\pi kh}\ln\frac{1+h/2r}{1-h/2r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+h^2/4} \qquad (22.15)$$

Используя разложения $ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+...$ и $ln(1-x)=-x+x^2/2-x^3/3+x^4/4-...$, имеем

$$p_c = p_\infty - \frac{\mu Q}{2\pi kh}\left(\frac{h}{2r} + \frac{h^3}{24r^3} + ...\right) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kr}\left(1 + \frac{h^2}{12r^2} + ...\right) \quad (22.16)$$

Здесь первый член разложения соответствует сферической скважине с тем же дебитом, а второй член дает возможность оценить расстояние, на котором фильтрационное течение можно признать уже сферическим. Достаточно потребовать, чтобы последний сохранённый член ряда был значительно меньшим 1. На расстоянии одного интервала притока от скважины при $r=h$ этот член составляет 1/12=0.08. Можно для очень мощной залежи ориентировочно считать, что за пределами одной длины интервала притока фильтрационное течение становится сферически симметричным.

Скорости фильтрации, индуцированные интервалом притока.

Выпишем выражения для фильтрационных скоростей, индуцируемых интервалом притока $0<z<h$ скважины в точке залежи с координатами (x, y, z). Как видно из рис. 4.1, если каждый малый участок интервала притока $d\xi$ рассматривать как сферическую скважину с дебитом $q(\xi)d\xi$. Вертикальную и радиальную составляющие скорости фильтрации, индуцируемые этим элементом притока, можно представить в виде

$$dv_z = -\frac{q(\xi)d\xi}{4\pi r^2}\cdot\frac{z-\xi}{r}, \quad dv_r = -\frac{q(\xi)d\xi}{4\pi r^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} \quad (22.17)$$

Предположим приток равномерным, и примем $q(\xi)=Q/h$, где Q есть дебит скважины. Проинтегрируем указанные выражения по интервалу притока. В результате будем иметь следующие, легко запоминаемые, формулы

$$v_z = \frac{Q}{4\pi h}\left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_A}\right), \quad v_r = \frac{Q}{4\pi h\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) \quad (22.18)$$

Обозначения пояснены на рис. 22.1. Здесь r_O и r_A - расстояния от точки M(x,y,z) до концов интервала притока, θ_1 и θ_2 – углы с горизонтальной плоскостью, образованные отрезками OM и AM. Вертикальная составляющая скорости зависит от того, ближе к какому концу интервала притока

скважины, О или А, расположена точка М. Если она ближе к точке А, то $v_z<0$, если же ближе к О, то $v_z>0$. Плоскость $z=h/2$ делит залежь на две области. При $z>h/2$ будет $v_z<0$, а при $z<h/2$ вертикальная составляющая $v_z>0$. Вдоль оси скважины, за пределами её интервала притока, вертикальная составляющая скорости фильтрации меняется согласно формуле (22.18)

$$v_z(0,0,z) = -\frac{Q}{4\pi z(h-z)} \qquad (22.19)$$

тогда как горизонтальная её составляющая равна нулю. Эта формула показывает, что и по вертикальной оси вдали от интервала притока скважины индуцированная скорость фильтрации обратно пропорциональна квадрату расстояния, $v_z \sim Q/4\pi z^2$.

В плоскости симметрии при $z=h/2$ вертикальная составляющая индуцированной скорости равна нулю, а для радиальной составляющей можно записать более простую формулу, так как $\sin\theta_2 = -\sin\theta_1 = -h/2r_A$.

$$v_r = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+h^2/4}} \qquad (22.20)$$

Эта формула так же показывает, что с удалением от скважины наибольшее значение горизонтальной составляющей скорости фильтрации убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поправочный множитель к асимптотике есть $1+0.125h^2/(x^2+y^2)$. Он показывает, что на расстоянии одного интервала перфорации ошибка в определении скорости составит около 12%, если пользоваться простым сферическим решением.

Фильтрационное поле при притоке к изолированным интервалам.

В пробуренной скважине могут интервалы перфорации чередоваться с неперфорированными участками ствола. Для такого рода случаев проще всего применять принцип суперпозиции течений, пользуясь формулами (22.18) или другими их аналогами. Для вертикальной скважины формулы (22.18) можно непосредственно суммировать, горизонтальные и вертикальные составляющие скорости фильтрации суммируем отдельно

$$v_z = \frac{1}{4\pi}\sum \frac{Q_i}{h_i}\left(\frac{1}{r_{Oi}} - \frac{1}{r_{Ai}}\right), \quad v_r = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}}\sum \frac{Q_i}{h_i}\left(\sin\theta_{2i} - \sin\theta_{i1}\right) \quad (22.21)$$

Здесь Q_i -дебиты по интервалам притока h_i одной и той же вертикальной скважины, r_i и θ_i –расстояния до концов интервалов притока и углы, образованные радиусами векторами с горизонтальной плоскостью.

В случае наклонной скважины с разными зенитными углами для разных интервалов притока, задача суперпозиции индуцированных течений становится сложнее. Формулы (22.18) справедливы и для наклонных скважин, однако составляющие скоростей направлены вдоль оси и поперек неё. Для разных участков притока, с учетом их пространственной ориентации, нужно сначала перейти к координатным составляющим индуцированных скоростей, а затем пользоваться принципом суперпозиции. Такого рода процедуры нами разработаны, однако из-за громоздкости формул мы их здесь не приводим. Отметим лишь, что вдали от каждого из этих интервалов можно ограничиться сферическим представлением индуцированного течения, которое позволяет значительно упростить получение желаемых результатов.

Приток к эллипсоиду вращения в однородном пласте.

Этот случай позволяет представить себе влияние двух параметров поверхности притока на значение дебита. Здесь приходится рассматривать отдельно два случая эллипсоида вращения: сплюснутого и вытянутого, формулы для дебита получаются разными. Считаем, что на поверхности эллипсоида поддерживается забойное давление, одинаковое во всех точках эллипсоида и равное p_c.

Уравнение поверхности вытянутого эллипсоида вращения в цилиндрических координатах r и z с полуосями R и h есть

$$\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1, \quad h > R, \quad a = \sqrt{h^2 - R^2} \quad (22.22)$$

На этой поверхности давление постоянно и равна p_c, постоянна она и равна p_∞ на бесконечном удалении от эллипсоида. Известно, что для гармонической функции постоянным будет значение давления и на поверхностях эллипсоидов, софокусных с (6), т.е. имеющих такое же

фокусное расстояние a. Эти поверхности можно представить в одном из следующих видов

$$\frac{r^2}{R^2+\lambda}+\frac{z^2}{h^2+\lambda}=1 \quad \textit{или}$$

$$\frac{r^2}{a^2\left(\sigma^2-1\right)}+\frac{z^2}{a^2\sigma^2}=1, \quad \sigma^2=\frac{h^2+\lambda}{h^2-R^2} \tag{22.23}$$

Найти решение удается введением эллипсоидальных координат σ и τ

$$r=a\sqrt{\left(\sigma^2-1\right)\left(1-\tau^2\right)},\ z=a\sigma\tau,\ \sigma>\sigma_0=h/a,\ 0<\tau<1. \tag{22.24}$$

причем уравнение Лапласа в этих координатах представится в виде [4]

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2-1\right)\frac{\partial p}{\partial\sigma}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial p}{\partial\tau}=0 \tag{22.25}$$

Используя граничные условия $p=p_c$ при $\lambda=0(\sigma=\sigma_0)$ и $p=p_\infty$ при $\lambda=\infty(\sigma=\infty)$, получим не зависящее от координаты τ решение для распределения давления вне эллипсоида

$$\frac{p-p_c}{p_\infty-p_c}=\frac{\ln\dfrac{\sigma+1}{\sigma-1}}{\ln\dfrac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}}, \quad \sigma_0=\frac{h}{\sqrt{h^2-R^2}}, \quad \sigma=\sqrt{\frac{h^2+\lambda}{h^2-R^2}}\ . \tag{22.26}$$

Остается теперь получить выражение для притока жидкости внутрь всего эллипсоида. Подробности выкладок утомительны и интересны лишь для энтузиастов. Приводим конечный результат

$$Q=\frac{4\pi k\sqrt{h^2-R^2}}{\mu\ln\left(\dfrac{h}{R}+\sqrt{\dfrac{h^2}{R^2}-1}\right)}\left(p_\infty-p_c\right)\approx\frac{4\pi kh}{\mu\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right)}\left(p_\infty-p_c\right). \tag{22.27}$$

Например, если приток жидкости происходит по интервалу перфорации длиною в 20м и радиусом R=0.1 м со средней депрессией p_∞-p_c=1 МПа, то при проницаемости залежи $k=10^{-13}$ м² и вязкости 1 мПа·с, уподобив его эллипсоиду вращения с полуосями 10 м и 0.1 м, дебит жидкости, согласно (22.27), можно принять равным Q=205 м³/сут.

По аналогии рассматриваем случай и для сплюснутого эллипсоида, когда $h<R$ и η<1. Эллипсоидальные координаты σ и τ связаны с декартовыми координатами r и z формулами

$$r = a\sqrt{\left(\sigma^2+1\right)\left(1-\tau^2\right)}, \quad z = a\sigma\tau,$$
$$a = \sqrt{R^2-h^2}, \quad \sigma > \sigma_0 = h/a, \quad 0 < \tau < 1, \tag{22.28}$$

причем уравнение Лапласа в этих координатах теперь представится в виде [19]

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2+1\right)\frac{\partial p}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(1-\tau^2\right)\frac{\partial p}{\partial\tau} = 0 \tag{22.29}$$

Используя граничные условия $p=p_c$ при $\sigma=\sigma_0$ и $p=p_\infty$ при $\sigma=\infty$, легко получим не зависящее от τ решение

$$\frac{p-p_c}{p_\infty-p_c} = \frac{arcctg\,\sigma}{arcctg\,\sigma_0}, \quad \sigma_0 = \frac{h}{\sqrt{R^2-h^2}}, \quad \sigma > \sigma_0. \tag{22.30}$$

Для притока внутрь всего эллипсоида вращения имеем (выкладки опускаем)

$$Q = \frac{4\pi k\sqrt{R^2-h^2}}{\mu\cdot arc\,tg\,\dfrac{\sqrt{R^2-h^2}}{h}}\left(p_\infty-p_c\right) \tag{22.31}$$

Случай диска (горизонтальная трещина может иметь такой вид) получится из (22.31) при $h\to 0$. Знаменатель дроби обращается в $\pi/2$ и для притока Q к диску получаем красивую формулу

$$Q_\partial = 8\frac{kR}{\mu}\left(p_\infty-p_c\right). \tag{22.32}$$

При проницаемости $k=10^{-13}$ м² и вязкости 1 мПа·с, в случае диска радиуса $R=10$ м, перепаде давления в 1 МПа, дебит жидкости, согласно (22.32), получим равным $Q=86.4$ м³/сут. Если бы был сплюснутый эллипсоид вращения с вертикальной полуосью h, то при тех же параметрах имели бы, согласно (22.31), растущие почти линейно с ростом h значения от притока к диску до притока к шару, которое больше в $\pi/2$ раз.

Формулы определения притока к эллипсоиду вращения нами проверены на согласие с формулой для сферы (22.4) предельным переходом, когда $h\to R$. Формулу для случая шара можно получить в обоих случаях.

Учет влияния кровли, подошвы и непроницаемых сбросов.

Выше мы предполагали, что залежь является неограниченной как по мощности, так и по простиранию. Однако мощность залежи конечна, хотя и значительно превосходит длину большинства интервалов притока скважин. Более того, часть интервалов притока располагаются в кровельной части залежи, а кровля считается непроницаемой. Упомянутые выше рассуждения и формулы пригодны лишь для той части скважин, которая имеет небольшие интервалы притока (до 10 метров) примерно в средней части этажа продуктивности.

В случае приточных интервалов в кровельной части, поступаем следующим образом. Используя принцип симметрии, продолжим мысленно залежь выше кровли и добавим зеркальные отражения скважин. Вместо одного интервала притока теперь будем иметь два равных с одинаковыми дебитами, и, согласно (22.18) расписываем индуцированные скорости или аналогичные суммы для распределения давлений. Подход этот и соответствующие формулы применяются для расчета взаимовлияния (интерференции) скважин и уточнения некоторых параметров, замеряемых в промысловых условиях.

В случае близости тектонического разлома или непроницаемого сброса, интервал притока зеркально отражаем через непроницаемую плоскость сброса и производим суммирование индуцированных скоростей по двум скважинам – данной и зеркально отраженной.

Применение старых общеизвестных формул к определению фильтрационных параметров мощной залежи, в свете всего вышеизложенного, нуждается в обосновании и введении поправок, если таковые окажутся существенными. Общеизвестные подходы в подавляющем своем большинстве предполагают двухмерность или близость к нему фильтрационного течения. Требуется развитие специальных методик и подходов для мощных водоносных пластов.

Выше мы уже отметили, что одной из поправок, учет которой весьма желателен при определении параметров, это размер радиуса контура питания скважины. К другим можно отнести изучение скин-эффекта, времени установления стационарных режимов, выявление неоднородностей, в частности, анизотропии, выявление наличия крупных трещин

и т. п. Одной из наиболее актуальных проблем представляется изучение кривых восстановления пластового давления (КВД) для мощных залежей. Несмотря на все старания, КВД не обнаруживает характерных признаков наличия трещин в залежи. Восстановление давления в скважинах с большими дебитами идет весьма быстро (от нескольких минут до 2-х часов), а последующие замеры в стволе скважины отражают изменение пластового давления из-за интерференции с соседними скважинами. В следующей лекции попытаемся объяснить, каким образом можно правильно интерпретировать КВД для добывающих скважин, учитывая большие мощности залежи.

Лекция 23.

Неустановившаяся фильтрация в массивной однородной залежи.

Точечный нестационарный сферический сток. Пуск сферической скважины с постоянным дебитом. Время выхода на стационарный режим и размеры зоны возмущения. Кривая восстановления давления (КВД) для сферической скважины в массивной залежи. Характерные признаки КВД для массивной залежи. Учет сжимаемости жидкости в стволе скважины.

Нестационарный точечный сток с постоянным дебитом.

Пусть в неограниченном пласте с постоянным начальным пластовым давлением p_∞ в момент времени t в начале координат включается точечный сток с постоянным дебитом Q. Вокруг стока появится сферическая зона заниженного пластового давления, причём с ростом времени размеры зоны сниженного давления будут нарастать. Задача состоит в том, чтобы найти распределение пластового давления по пространству на любой момент времени.

Очевидно, поскольку в исходных данных линейный размер отсутствует, то он может появиться лишь через пьезопроводность пласта, пространственная координата и время должны образовывать вместе с пьезопроводностью одну безразмерную координату, т.е. решение о пуске точечного стока должно быть автомодельным. Что касается заданного дебита, то он определит интенсивность общего процесса снижения давления. Чем больше Q, тем быстрее будут темпы падения пластового давления. Не автомодельный вариант задачи с заданным радиусом «сферической скважины» рассмотрим чуть позже. Математическую формулировку задачи можно представить в следующей форме

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad r > 0, \quad t > 0 \tag{23.1}$$

$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2 \left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} \right) = Q, \quad p(r,0) = p(\infty,0) = p_\infty. \tag{23.2}$$

Здесь к – пьезопроводность пласта, r–радиальная координата, t–время. Решение этой задачи ищем в виде

$$p = p_\infty - At^\sigma f(\eta), \quad \eta = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}} \tag{23.3}$$

Выкладки показывают, что такое решение возможно лишь при σ=-1/2. Значение A и функция f определяются формулами

$$A = \frac{\mu Q}{8\pi k\sqrt{\kappa}}, \quad f(\eta) = \frac{1}{\eta} erfc(\eta) = \frac{2}{\eta\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-\eta^2} d\eta \tag{23.4}$$

Подставляя в (23.3) и упрощая, получим для давления

$$p(r,t) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kr} erfc\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \tag{23.5}$$

Для малых значений аргумента *erfc* (больших t или малых r), выделив асимптотическое приближение, имеем

$$p(r,t) \approx p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kr}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{\pi\kappa t}}\right), \quad \frac{r}{\sqrt{\pi\kappa t}} << 1. \tag{23.6}$$

Оно показывает, что для установления стационарного режима на расстоянии r от стока требуется ориентировочно время, значительно большее $t_* = r^2/\pi\kappa$. При значении пьезопроводности κ=1 м²/с и на расстоянии r=10 м от стока это время составляет всего полминуты, однако с увеличением расстояния оно растёт пропорционально квадрату расстояния, для расстоянии 100 м потребуется в 100 раз большее время, т. е. порядка 1 часа. Можно полагать, что сутки есть достаточное время для перехода в стационарное состояние зоны радиусом 100 м.

Формула (23.6) может быть использована для предсказания падения давления на сфере достаточно малого радиуса R. Видно, что для больших времён на сфере установится определённое предельное значение

$$p(R,\infty) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kR}. \tag{23.7}$$

Для бесконечного по мощности пласта характерным является свойство «возобновляемости» упругих запасов. Запасы неисчерпаемы и, сколько бы ни извлекали, в

трёхмерном случае давление на забое снижаться ниже (23.7) не будет. Такого свойства нет у пластов платформенного типа с неограниченными запасами. При положительных забойных давлениях постоянный дебит невозможно поддерживать бесконечно долго.

Время перехода на установившийся режим фильтрации для мощной залежи меньше, чем для пластов платформенного типа, в трех измерениях переходные процессы идут значительно быстрее, чем в двух измерениях. Следует ожидать, что и кривые восстановления давления в мощных залежах кратковременны.

Отметим ещё одно обстоятельство. Если сферический сток остановить, спустя некоторое время t_o, то из асимптотической формулы (23.6) можно получить темпы восстановления давления в близких к стоку точках. Согласно принципу суперпозиции течений можно полагать, что закрытие стока можно приравнять включению источника той же мощности, написать вместо (23.5) суммарную формулу

$$p(r,t) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k r}\left\{ erfc\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - erfc\left(\frac{r}{2\sqrt{\kappa\left(t-t_0\right)}}\right)\right\}, \quad t > t_0 . \qquad (23.8)$$

Для $t>>t_o$ асимптотика (23.8) не зависит от координаты r

$$p(r,t) \approx p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi k\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}}\left(1-\sqrt{\frac{t-t_0}{t}}\right), \quad r << \sqrt{\pi\kappa t_0} \qquad (23.9)$$

Это означает, что кривая восстановления давления на забое должна иметь линейную асимптотику от координаты $1/\sqrt{t-t_0}$, а не от логарифма времени.

Приток к «сферической скважине».

Приведем теперь не автомодельное, а точное решение задачи о пуске «сферической скважины» заданного радиуса R в девственной неограниченной залежи. Постановка задачи описывается снова теми же математическими соотношениями (23.1) и (23.2) с новым условием на поверхности скважины при $r=R$, и ограничением $r>R$

$$4\pi R^2\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R} = Q . \qquad (23.10)$$

Задачу можно решить операционным методом по Лапласу

$$\mathrm{P}(r,s) = \int (p(r,t) - p_\infty)\exp(-st)dt\,. \qquad (23.11)$$

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathrm{P}'' + \frac{2}{r}\mathrm{P}' - \frac{s}{\kappa}\mathrm{P} = 0, -4\pi R^2 \frac{k}{\mu}\frac{d\mathrm{P}}{dr}\bigg|_{r=R} = \frac{Q}{s}, \qquad (23.12)$$

имеющее ограниченное решение, в виде экспоненты

$$\mathrm{P}(r,s) = \frac{C(s)}{r}\exp\left(-r\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right) \qquad (23.13)$$

Функция $C(s)$ определяется из граничного условия (23.10), записанного в изображениях по Лапласу. Решение в изображениях имеет вид

$$\mathrm{P}(r,s) = -\frac{\mu Q}{4\pi k}\cdot\frac{\exp\left((R-r)\sqrt{s/\kappa}\right)}{s(1+R\sqrt{s/\kappa})\cdot r}, \quad r > R\,. \qquad (23.14)$$

Нас будет интересовать лишь поведение давления на поверхности скважины, потому мы выпишем оригинал при $r = R$. В этом частном случае экспонента обращается в 1, и изображение принимает вид

$$\mathrm{P}(R,s) = -\frac{\mu Q}{4\pi kR}\cdot\frac{1}{s(1+R\sqrt{s/\kappa})} \qquad (23.15)$$

Пользуясь таблицами обращения [16,17], получаем

$$p(R,t) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kR}\left(1 - e^{\tau^2}erfc(\tau)\right) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kR}\varphi(\tau),\ \tau = \frac{\kappa t}{R^2}\,. \qquad (23.16)$$

В начальный момент $\varphi(\tau)=0$, с течением времени она возрастает до 1. Рост функции определяет характер установления значения давления на забое, которое зависит от безразмерного времени τ. Ниже для больших значений времен дана асимптотика поведения $\varphi(\tau)$, по которой можно судить о времени выхода забойного давления предельное значение (23.7).

Согласно известным разложениям функций [15], для больших времён имеем

$$erfc\ x \approx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}(1-\frac{1}{2x^2}+..)\ при\ x\to\infty,$$

$$e^{\tau}erfc\ \sqrt{\tau} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}(1-\frac{1}{2\tau}+...)\ при\ \tau\to\infty,$$

$$\varphi(\tau) \approx 1-\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}+\frac{1}{2\tau\sqrt{\pi\tau}}-...\ при\ \tau\to\infty.$$

Время выхода на установившееся значение забойного давления оказывается не очень значительным. Нужно, чтобы $\pi\tau$ было хотя бы более 1000. Тогда $\sqrt{\pi\tau}$ будет более 30. Второй член в выражении функции $\varphi(\tau)$, т.е. разница между начальным и конечным, установившемся, значением забойного давления, составит не более 3%. В реальности это означает, что время выхода на стационарное значение $t>1000R^2/\pi\kappa$. При значении пьезопроводности κ=1 м^2/сек и радиусе сферической скважины 1 м имеем $t>1000/\pi$ сек, т.е. менее 5 минут.

Что же касается времени выхода на асимптотику, когда можно сохранить лишь два члена в выражении функции $\varphi(\tau)$, то времена эти получаются меньше. Чтобы можно было пренебречь в разложении $\varphi(\tau)$ третьим членом с ошибкой менее 3%, достаточно потребовать выполнения неравенства $\tau>20$. Для размерного времени это означает выполнение неравенства $t>20R^2/\kappa$. Для тех же параметров, значении пьезопроводности κ=1 м^2/сек и радиусе R=1 м, получаем значительно меньшее время выхода на асимптотический режим, около 20 сек. Можно полагать, что время выхода на асимптотические режимы в очень мощных пластах порядка нескольких минут, а стационарные значения давления на забое устанавливаются в течение менее 1 часа.

Вернёмся к обращению изображения (20.12). Оно есть в таблицах [16,17]

$$p(R,t) = p_\infty - \frac{\mu Q}{4\pi kr}\left\{erfc\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}} - e^{\frac{\kappa t}{R^2}+\frac{r-R}{R}}erfc\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\kappa t}}+\frac{\sqrt{\kappa t}}{R}\right)\right\} \qquad (23.17)$$

Применение асимптотических разложений позволяет найти радиус области возмущения. На рис. 20.1 изображены графики функции ψ от переменной η для небольших значений τ.

$$\psi(\eta,\tau)=erfc\left(\frac{\eta-1}{2\sqrt{\tau}}\right)-e^{\tau+\eta-1}erfc\left(\frac{\eta-1}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{\tau}\right),\ \eta=\frac{r}{R},\ \tau=\frac{\kappa t}{R^2}. \qquad (23.18)$$

Отметим, сюда не включено предельное распределение давления, обратно пропорциональное расстоянию от центра скважины, эта функция даёт поправочный лишь множитель для предельного распределения. Как можно наблюдать по рис. 21.1, подъём до 1 графиков будет проходить достаточно долгое время.

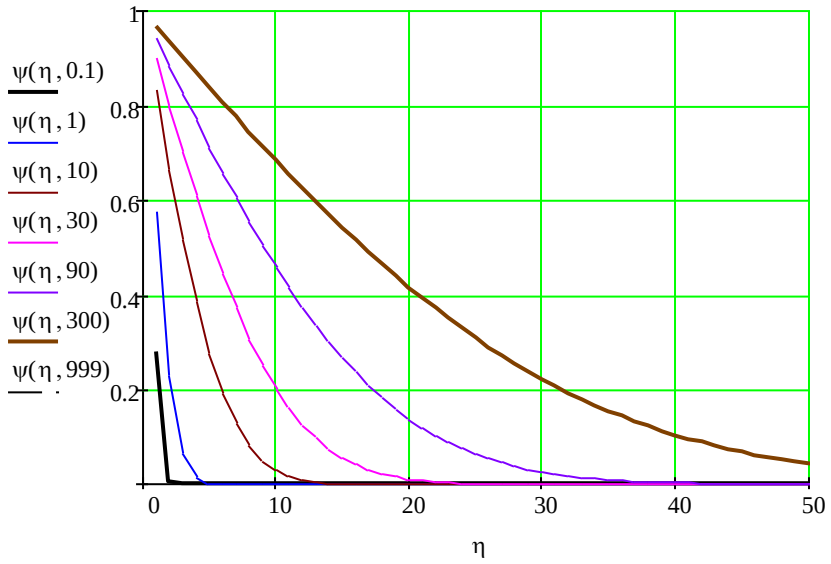


Рис. 23.1. Графики функции ψ(η,τ) для ряда значений безразмерного времени τ. Значение τ=1 примерно соответствует одной секунде для наиболее часто встречающихся случаев.

Кривая восстановления давления для «сферической скважины»

Будем полагать, что добывающая скважина работала в стабильном режиме достаточно долго, и вокруг нее установилось стационарное поле давлений, при котором изменение давления можно считать обратно пропорциональным расстоянию от центра сферической скважины.

Сохраним введённые выше обозначения: $p(r,t)$–пластовое давление, p_∞–давление вдали от скважины, p_c–давление на забое скважины, κ–пьезопроводность, R–радиус сферической скважины, r–сферическая координата, t – время. Математическую постановку задачи можно описать соотношениями

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right),\quad r>R,\quad t>0 \tag{23.19}$$

$$\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R}=0 \tag{23.20}$$

$$p(r,0)=p_\infty-(p_\infty-p_c)\frac{R}{r} \tag{23.21}$$

Введем, вместо давления, безразмерное его значение

$$u(r,t)=\frac{p_\infty-p}{p_\infty-p_c}-\frac{R}{r} \tag{23.22}$$

Для функции *u(r,t)* уравнение (23.18) сохраняется, начальное значение становится проще, а граничные условия не осложняются. Задача для неё записывается в виде

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad r>R,\quad t>0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R}=\frac{1}{R},\quad u(r,0)=u\left(\infty,t\right)=0. \tag{23.23}$$

Перейдем к изображению по Лапласу искомой функции

$$U(r,s)=\int_0^\infty e^{-st}u(r,t)dt\,. \tag{23.24}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U''+\frac{2}{r}U'-\frac{s}{\kappa}U=0,\quad U'(R)=\frac{1}{Rs}\,, \tag{23.25}$$

которое имеет ограниченное на бесконечности решение

$$U(r,s)=\frac{C\left(s\right)}{r}e^{-R\sqrt{s/\kappa}}\,. \tag{23.26}$$

Константа интегрирования *C* определяется из граничного условия и решение в изображениях записывается в виде

$$U(r,s)=\frac{R}{r}\cdot\frac{e^{-(r-R)\sqrt{s/\kappa}}}{s(1+R\sqrt{s/\kappa})} \tag{23.27}$$

Обращение этого изображения можно найти по таблицам, однако, для анализа кривых восстановления давления нам достаточно иметь обращение только при *r=R*. Для этого частного случая обращение имеет вид

$$u(R,t)=1-e^{\kappa t/R^2}erfc(\sqrt{\kappa t/R})=\varphi(\tau),\quad \tau=\kappa t/R^2 \tag{23.28}$$

Функция $\varphi(\tau)$ определяет как характер установления стационарного значения давления на забое, как при пуске скважины, так и при восстановлении пластового давления после её закрытия. Очевидно, и время восстановления давления должно быть таким же, как и время установления стационарного режима, не выше нескольких часов. Что же касается времени выхода на асимптотику кривой, то достаточным оказывается несколько десятков минут, как это было проанализировано выше для случая выхода на стационарный режим.

Итак, мы установили две важные формулы нестационарной сферической фильтрации для мощной однородной залежи. При пуске скважины с постоянным дебитом давление на забое устанавливается согласно закону

$$p(R,t) = p_\infty - \frac{\mu Q_o}{4\pi k R}\varphi(\tau), \quad \varphi(\tau) = 1 - e^{\tau} erfc(\sqrt{\tau}), \quad \tau = \kappa t / R^2 . \quad (23.29)$$

а при восстановлении давления после длительной эксплуатации оно растёт от значения забойного давления p_c до пластового p_∞ согласно аналогичному закону

$$p(R,t) = p_c + (p_\infty - p_c)\varphi(\tau), \quad p_c = p_\infty - \frac{\mu Q_o}{4\pi k R} \quad (23.30)$$

Таблица 23.1. Выборочные значения функции $\varphi(\tau)$.

τ	$\varphi(\tau)$	τ	$\varphi(\tau)$	τ	$\varphi(\tau)$	τ	$\varphi(\tau)$
0	0	1,21	0,5983	5,29	0,7733	12,96	0,8487
0,01	0,1035	1,44	0,6215	5,76	0,7815	13,69	0,8526
0,04	0,1910	1,69	0,6424	6,25	0,7892	14,44	0,8562
0,09	0,2654	1,96	0,6613	6,76	0,7964	15,21	0,8597
0,12	0,2985	2,25	0,6784	7,29	0,8031	16,00	0,8630
0,16	0,3292	2,56	0,6940	7,84	0,8095	19,36	0,8751
0,25	0,3843	2,89	0,7083	8,41	0,8154	25	0,8894
0,36	0,4322	3,24	0,7214	9,00	0,8210	36	0,9073
0,49	0,4741	3,61	0,7335	9,61	0,8263	49	0,9202
0,64	0,5109	4,00	0,7446	10,24	0,8313	64	0,9300
0,81	0,5435	4,41	0,7549	10,89	0,8360	81	0,9377
1,00	0,5724	4,84	0,7644	11,56	0,8405	100	0,9439

Из таблицы видно, что половина значения забойного давления восстанавливается за τ=0.6, выход на асимптотику происходит с τ=4, после восстановления 0.75 его значения. Асимптотикой следует пользоваться для замеров в интервале от 75% до 95% восстанавливаемого значения давления.

Сравнение КВД сферического и плоского случаев трудно провести из-за разного характера поведения давления для стационарного притока. Вместо (23.20) в плоском случае принимают логарифмическое распределение давления, зависящее от отношения радиуса контура питания R_∞ к радиусу скважины R_c

$$p(r,0) = p_c + (p_\infty - p_c)\frac{\ln(r/R_c)}{\ln(R_\infty/R_c)}, \quad r > R_c \tag{23.31}$$

Аналогичная постановка задачи и решение в изображениях плоской задачи имеет вид

$$U(r,s) = \frac{1}{\ln(R_\infty/R_c)} \cdot \frac{K_0(r\sqrt{s/\kappa})}{sR_c\sqrt{s/\kappa}K_1(R_c\sqrt{s/\kappa})} \tag{23.32}$$

Получить обращение в элементарных функциях не удается, оно выражается через квадратуры, в несобственных интегралах. Но асимптотическое поведение для больших времен выражается через логарифмическую функцию в простом виде

$$u(R,t) \approx \frac{\ln 2\tau - 0.5772}{\ln(R_\infty/R_c)}, \quad \tau = \frac{\kappa t}{R_c^{\,2}} \tag{23.33}$$

Аналогичная асимптотика для сферической скважины даёт

$$u(R,t) = \phi(\tau) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad \tau = \frac{\kappa t}{R^2} \tag{23.34}$$

Таким образом, к характерным признакам КВД массивной залежи можно считать прирост давления для больших времен обратно пропорционально квадратному корню от времени, тогда как для плоского случая справедлив прирост пропорционально логарифму времени.

Влияние сжимаемости жидкости в стволе скважины на КВД.

Необходимость учёта сжимаемости жидкости в стволе эксплуатационной колонны возникает при закрытии скважины на устье. При учете сжимаемости картина меняется для малых времен, сохраняя асимптотику для больших времен.

Граничное условие для пластового давления на забое принимает вид

$$V_c \beta \frac{dp_c}{dt} = \frac{kS_{np}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=R_c} . \qquad (23.35)$$

Здесь V_c–объем жидкости в колонне скважины, β–её сжимаемость, p_c–давление на забое скважины, $S_{пр}$–поверхность притока нефти к скважине, k -проницаемость коллектора, μ–вязкость жидкости. С ростом давления на забое содержащаяся в стволе жидкость сжимается и даёт дополнительный приток в колонну скважины.

Условие (23.35) справедливо как для цилиндрической колонны, так и для сферического забоя. В это условие входит новый комплексный параметр, имеющий размерность скорости

$$\upsilon_o = \frac{k S_{np}}{\mu \beta V_c} \qquad (23.36)$$

Для сферической скважины с учетом сжимаемости нефти в колонне математическую постановку задачи можно описать соотношениями

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right), \quad r > R, \quad t > 0 \qquad (23.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{1}{\upsilon_o}\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{r=R}, \; p(\infty, t) = p_\infty,$$

$$p(r,0) = p_\infty - (p_\infty - p_c)\frac{R}{r}. \qquad (23.38)$$

Введем вместо давления безразмерное его значение $u(r, t)$ согласно формуле

$$p(r,0) = p_\infty - (p_\infty - p_c)\frac{R}{r} + (p_\infty - p_c)u(r,t) \qquad (23.39)$$

Для функции $u(r, t)$ уравнение (23.22) сохраняется, начальное условие становится проще, а граничные условия не осложняются. Задача записывается в виде

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad r > R, \quad t > 0 \qquad (23.40)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\upsilon_o}\left(\frac{du}{dt}\right)_{r=R}, u(\infty, t) = u(r,0) = 0 \qquad (23.41)$$

Перейдем теперь к изображениям по Лапласу искомой функции $u(r,t)$

$$U(r,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(r,t)dt \qquad (23.42)$$

Тогда получим для изображения обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U'' + \frac{2}{r}U' - \frac{s}{\kappa}U = 0, \quad U'(R) + \frac{1}{Rs} = \frac{s}{\upsilon_o}U(R), \tag{23.43}$$

которое имеет решение, ограниченное на бесконечности, вида

$$U(r,s) = \frac{C(s)}{r}e^{-r\sqrt{s/\kappa}} \tag{23.44}$$

Постоянная C определяется из граничного условия

$$C(s) = \frac{\mathrm{R}\cdot \mathrm{e}^{R\sqrt{s/\kappa}}}{s(1+R\sqrt{s/\kappa}+Rs/\upsilon_o)} \tag{23.45}$$

и для решения в изображениях получается выражение, сложнее, чем (23.29)

$$U(r,s) = \frac{R}{r}\cdot\frac{e^{-(r-R)\sqrt{s/\kappa}}}{s(1+R\sqrt{s/\kappa}+Rs/\upsilon_o)} \tag{23.46}$$

Отличие от (23.29) состоит в том, что в знаменателе добавилось слагаемое Rs/υ_o, что делает обращение не табличным. Ограничимся снова лишь частным случаем, будем искать лишь динамику давления на забое при $r=R$. Тогда изображение значительно упрощается

$$U(R,s) = \frac{1}{s(1+R\sqrt{s/\kappa}+Rs/\upsilon_o)} \tag{23.47}$$

Однако добавившийся член вносит в кривую восстановления давления качественные изменения. Для больших значений s, что соответствует малым временам, рост давления определяется линейной функцией времени $u(R, t)=\upsilon_o t/R$. Без учета сжимаемости нефти в колонне скважины рост давления непосредственно после закрытия скважины определялся законом квадратного корня от времени.

Выясним более подробно поведение роста давления в начальный момент времени, разложив функцию (23.47) по отрицательным степеням корня от параметра преобразования s. Первые 4 члена разложения пишутся в виде

$$U(R,s) = \frac{\upsilon_o}{Rs^2}\left\{1 - \frac{\upsilon_o}{\sqrt{\kappa}s} - \frac{\upsilon_o}{R}\left(1 - \frac{\upsilon_o R}{\kappa}\right)\frac{1}{s} + \frac{\upsilon_o^2}{R\sqrt{\kappa}}\left(2 - \frac{\upsilon_o R}{\kappa}\right)\frac{1}{s\sqrt{s}} + \cdots\right\} \tag{23.48}$$

Почленно обращаем этот ряд, пользуясь известными формулами соответствия

$$\frac{1}{s^2}\leftrightarrow t,\quad \frac{1}{s^3}\leftrightarrow \frac{t^2}{2},\quad \frac{1}{s^4}\leftrightarrow \frac{t^3}{6},\cdots$$
$$\frac{1}{s\sqrt{s}}\leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t},\quad \frac{1}{s^2\sqrt{s}}\leftrightarrow \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t\sqrt{t},\quad \frac{1}{s^3\sqrt{s}}\leftrightarrow \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^2\sqrt{t},\cdots \qquad (23.49)$$

Тогда прирост давления на забое определяется функцией

$$u(R,t)=\frac{\upsilon_o t}{R}-\frac{4\upsilon_o^2 t\sqrt{t}}{3R\sqrt{\pi\kappa}}-\frac{\upsilon_o^2}{R^2}\left(1-\frac{\upsilon_o R}{\kappa}\right)\frac{t^2}{2}+\frac{8\upsilon_o^3}{R^2\sqrt{\pi\kappa}}\left(2-\frac{\upsilon_o R}{\kappa}\right)\frac{t^2\sqrt{t}}{15}+\cdots \qquad (23.50)$$

Начальный участок восстановления давления линейный, но отклонения от линейного поведения определяется влиянием второго члена, в котором участвует пьезопроводность. Отношение второго члена к первому составляет значение

$$\frac{4\upsilon_o\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi\kappa}}. \qquad (23.51)$$

Пользоваться линейным приближением можно до тех пор, пока это значение много меньше 1, что приводит к ограничению на время

$$t<<\frac{9\pi\kappa}{16\upsilon_o^2}=1.77\,t_0,\quad t_0=\frac{\kappa}{\upsilon_o^2} \qquad (23.52)$$

Время t_o можно охарактеризовать как свойственное начальному участку. Оценки показывают, что это время может оказаться достаточно большим. Пьезопроводность может быть порядка 1 м²/с, а характерная скорость υ_o – примерно сотые доли м/с. Так что время $t_o = 10^4$ сек порядка нескольких часов и может составить значительную долю кривой восстановления давления. Начальный линейный участок по своей продолжительности в несколько раз (до 5) меньше t_o.

Характерная скорость $\upsilon_o = kS_{пр}/\mu\beta V_c$ с уменьшением объема жидкости или её сжимаемости в колонне НКТ возрастает, и время t_o уменьшается. При $\beta\to 0$ будем иметь $\upsilon_o\to\infty$ и $t_o\to 0$. В пределе линейный участок КВД исчезает.

Без учета сжимаемости нефти в колонне НКТ начальный участок КВД растет по закону квадратного корня от времени. Если снятые КВД имеют линейный начальный участок, то это свидетельствует о том, что надо учитывать сжимаемость жидкости в колонне скважины.

Проведем детальную оценку характерной скорости υ_o применительно к залежи фундамента Белого Тигра. Проницаемость залежи фундамента варьирует в пределах от 10

до 100 мД, площадь поверхности притока к скважине $S_{пр}=2\pi R_c H$ $=6.28\cdot0.1\cdot(20\div40)$ изменяется от 10 до 20 м², вязкость нефти $\mu_o=0.4\cdot10^{-3}$ Па·с, сжимаемость нефти $\beta=25\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$, объем воды в НКТ $V_c=30\div40$ м³. Тогда для характерной скорости получаем ориентировочный интервал ее изменения: от 0.0025 до 0.05 м/с. Верхние значения соответствуют большим интервалам притока и высоким проницаемостям коллектора, малые значения – низким проницаемостям и малым интервалам притока.

Оценим теперь возможный интервал изменения характерного времени t_o. Примем пористость $m=0.02$ и пренебрегаем связанной водой. Сжимаемость нефти и пустот породы примем равными соответственно $\beta_н=25$ и $\beta_п=20\cdot10^{-4}$МПа$^{-1}$. Для коллектора $\kappa=k/\mu m(\beta_н+\beta_п)\approx0.25\div2,5$ м²/с. Поделив это значение на квадрат характерной скорости, для времени t_o получаем достаточно большой возможный интервал его изменения, от 15 минут до 12 часов. Начальный линейный участок КВД будет значительно меньше и составит от 3-4 минут до 2-3 часов.

Параметр t_o весьма восприимчив к значениям характерной скорости v_o, так как зависит от квадрата этой скорости. Если в НКТ выделяется газ из нефти, то сжимаемость растет за счет выделившегося газа, скорость v_o становится меньше, а время t_o значительно больше. В итоге может получиться и так, что линейный участок займет большую часть КВД, чем её асимптотический участок. Поэтому важно научиться обрабатывать и линейную часть КВД.

Найдем время выхода на асимптотику КВД сферической скважины. В отсутствии сжимаемости жидкости в НКТ, т.е. при $v_o=\infty$, выход на асимптоту непосредственно улавливается по рис. 23.2. Видно, что для выхода на асимптоту абсцисса преобразованной переменной должна быть менее 0.5. То есть должно быть выполнено условие $\tau>4$. Учитывая, что $\tau=\kappa t/R^2$, получаем для области асимптоты $t_{ac}>4R^2/\kappa$. Это небольшие времена. Если бы в НКТ жидкость была несжимаемой, линейный начальный участок отсутствовал бы и выход КВД на асимптотику происходил бы через минуту – другую. Однако сжимаемость жидкости в стволе скважины существенно меняет решение. Новое решение надо считать и табулировать для лучшего выяснения картины восстановления давления.

Численное обращение изображения (23.46) и табулирование КВД – очень трудоемкая задача, поэтому за выход на асимптоту примем условие приближенного равенства с изображением без учёта сжимаемости. Потребуем, чтобы добавившийся в знаменателе (23.46) новый третий член был незначительным по сравнению со вторым, т.е. $s<<v_0^2/\kappa=1/t_0$. Малым значениям параметра преобразования s соответствуют большие времена, и это условие означает, что выход на асимптоту следует ожидать при временах $t>>t_0$. Выше мы получили оценки для характерного времени t_0 от 15 минут до 12 часов. Для выхода на асимптотику требуется гораздо большее время, от часов до суток. Начальный линейный участок задерживает выход КВД на асимптотику, а может вообще и вовсе подавить её. Так что методики, широко используемые на практике и основанные на асимптотических представлениях решений, могут оказаться неприемлемыми вовсе.

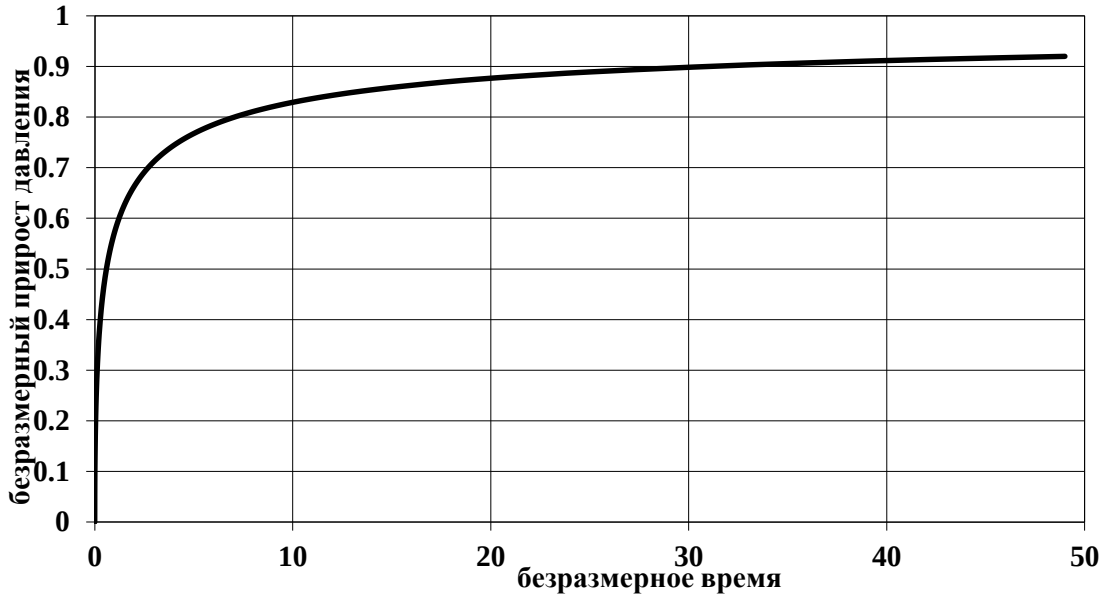


Рис. 23.2. Кривая восстановления давления для сферической скважины.

Укажем общее время восстановления давления. Оно одинаково для обоих решений, с учетом сжимаемости нефти в НКТ или без этого учета. Примем допустимую точность в 3%. При депрессии 30 кгс/см² и допустимой точности замеров в 1 кгс/см² погрешность составляет 3,3%. За время полного восстановления давления с погрешностью менее 3% от абсолютной величины депрессии можно принять τ=400. Тогда

для реального времени восстановления имеем $t_в=400R^2/\kappa$. При $R^2=5$ м^2 и $\kappa=0.2$ м^2/сек для общего времени восстановления давления получаем $t_в\approx10000$ сек, т.е. 2-3 часа.

Сравним теперь время выхода КВД на асимптотику со временем восстановления давления. Узнаем, каково условие, при выполнении которого на КВД можно поймать более или менее представительный участок асимптоты. Потребуем, чтобы время восстановления давления превосходило время начального линейного участка, и время выхода КВД на асимптоту, т.е. $t_в>>t_о$. это значит, что должно выполняться сильное неравенство

$$\frac{400R^2}{\kappa} >> \frac{\kappa}{v_0^2}, \quad \upsilon_0 >> \frac{\kappa}{20R}, \quad \frac{kS_{пр}}{\mu\beta V_c} >> \frac{k}{\mu m(\beta_н+\beta_п)}\cdot\frac{1}{20R} \qquad (23.53)$$

Производя упрощения, получаем условие

$$\beta V_c << 20m(\beta_н+\beta_п)S_{пр}R, \quad R\approx\sqrt{S_{пр}/4\pi}\,, \qquad (23.54)$$

при выполнении которого можно надеяться на обработку асимптотического участка КВД. Если же это условие не выполнено, то на КВД асимптотического участка просто может и не быть. Надо обращаться к нестандартным методам обработки.

Для ряда добывающих скважин залежи фундамента Белого Тигра можно принять: m=0.02; $\beta_н+\beta_п=50\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$; $S_{пр}$=25 м^2; R=2 м. Неравенство (23.54) накладывает довольно жесткое ограничение на сжимаемость нефти в НКТ, $\beta V_c<<$ 0.1 м^3/МПа. При V_c=40 м^3 получаем β <<0.0025 МПа$^{-1}$ для сжимаемости нефти в скважине, что невозможно, ибо в пласте сжимаемость нефти составляет примерно то же самое 0.0025 МПа$^{-1}$. Это значит, что асимптотический участок на КВД, скорее всего, будет отсутствовать.

Условия применимости методик определения параметров по КВД.

На рис. 23.3 и 23.4 изображены КВД для скважин №810 и №406, интервалы притока которых настолько малы, что их можно принять за сферические.

Интервал притока скважины №810 составляет по термическим исследованиям всего 15 м, от 3380 до 3395 м абсолютной отметки глубины. Интервал притока скважины

№406 составляет 38 м при кровле залежи, на а.о. 3209-3247 м. В обоих случаях интервал притока очень мал по сравнению с мощностью залежи около км. Налицо сферический характер гидродинамических течений. Обработка КВД должна опираться на результаты решений для сферической скважины. Поверхности притока этих скважин $2\pi R_c H$ имеют площади $S_{пр}$=19 м² и $S_{пр}$=48 м² соответственно. Радиусы эквивалентных сферических скважин составят R=0.9 м и R=1.4 м ориентировочно, так как из условий равенства площадей приточных поверхностей следует $R=(R_c H/2)^{1/2}$, а радиус скважин R_c=0.1 м.

Рис. 23.3. Кривая восстановления давления скв. 810 Белого Тигра. Есть почти линейный участок, свидетельствующий о сферичности течения.

Для скважины 810 время восстановления давления составило 350 минут. Для скважины 406 –всего 30 минут. Выше было определено, что за время восстановления давления можно принять

$$t_в = \frac{400R^2}{\kappa} = \frac{200R_c H}{\kappa}, \quad откуда \quad \kappa = \frac{200R_c H}{t_в} \qquad (23.55)$$

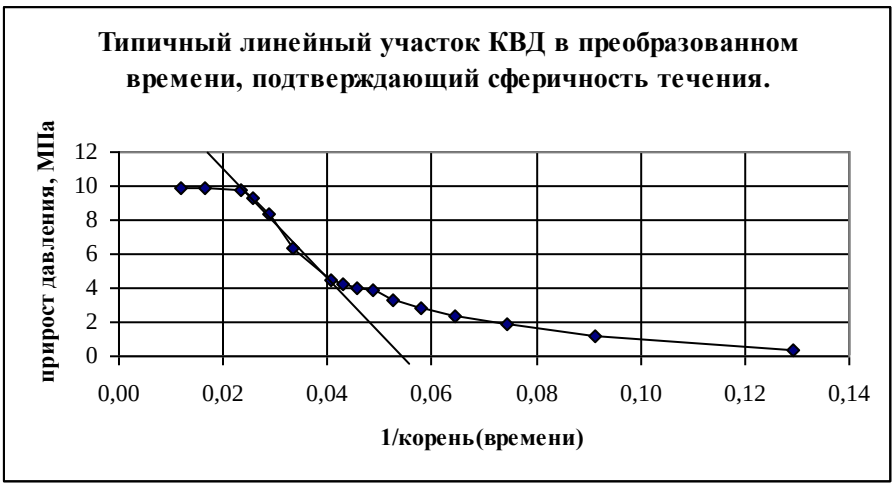


Рис. 23.4. Кривая восстановления давления для скв. 406 Белого Тигра. Есть почти линейный участок, свидетельствующий о сферичности течения.

Подставив в эту формулу соответствующие значения интервалов притока, имеем пьезопроводность коллектора для окрестности скважины №810 к=0.0143 м²/с. Для окрестности скважины №406 к=0.42 м²/сек (по более ранним данным от 14.01.93 г 0.27 м²/сек).

Начальный линейный участок КВД таков, что время выхода линейного участка на предельное значение по скважине 810 составляет 190 мин, а по скважине 406 около 20 мин. Выше было определено для линейного участка $u=v_0t/R$. Выход его на предельное значение означает $u=1$, т.е. имеет место при $t=t_*=R/v_0$. По замеренному времени t_* можно определить еще один параметр – аналог пьезопроводности для колонны скважины

$$\kappa_{скв} = \frac{k}{\mu\beta} = \frac{V_c}{2\pi t_* \sqrt{2R_c H}} \qquad (23.56)$$

Для скв. 810 при V_c=40 м³ и Н=15 м имеем $\kappa_{скв}=3.2\cdot10^{-4}$ м²/с, а для скв. 406 при V_c=40 м³ и Н=38 м имеем $\kappa_{скв}=19.3\cdot10^{-4}$ м²/с. Приняв для скв..810 $\mu=0.43\cdot10^{-3}$ Па·с и $k=2.2\cdot10^{-15}$ м² по ИД, из (23.56) получаем значение сжимаемости нефти в стволе скважины β=0.016МПа$^{-1}$. Это значение велико, почти на порядок больше сжимаемости пластовой нефти. Поэтому КВД скв. 810 скорее всего характеризует параметры скважины, нежели параметры пласта. При анализе КВД скв.810 надо

принимать во внимание сжимаемость столба нефти и возможное выделение газа в верхней части его колонны.

Для скв.406 согласно индикаторным кривым проницаемость оценивается в 3.2 мД, и значение сжимаемости нефти в стволе скважины по формуле (23.56) получается равным β=0.0039 МПа$^{-1}$. Это значение сравнимо со сжимаемостью нефти $\beta_н$≈0.0022 МПа$^{-1}$, найденной в лабораторных условиях. Не будем останавливаться на других подробностях обработки КВД. Отметим лишь, что для скважин с малым интервалом притока и мощным коллектором желательно развитие новых методов обработки КВД, учитывающих пространственный характер фильтрации.

Лекция 24

Моделирование сжимаемости порового и трещинного пространства пород

Модуль упругости тела, содержащего пустоты. Объемная деформация тела, содержащего пустоты. Объемные деформации породы при трехосном растяжении-сжатии. Сжимаемость пустот трещинного, порового и трещинно-порового коллектора от изменения пластового и горного давлений.

Деформации твердых тел и горных пород приводят к изменению их объемов, а также к сопутствующему изменению объемов пустот, вмещающих запасы углеводородов. В этой связи представляется желательным обратить внимание специалистов на основы, учет которых необходим в ряде случаев применения известных понятий сжимаемости породы, породообразующего материала и порово-трещинного пространства коллектора.

Основы теории деформаций детально и доходчиво изложены в [1], дополнительные справочные сведения можно почерпнуть в [2]. Наиболее известной для отечественных специалистов нефтяников по деформациям горных пород можно считать монографию [3], в которой дан обзор постановок задач, достаточно полное изложение теоретического материала для случая равномерного всестороннего сжатия, а также фактические данные по гранулярным коллекторам. Обзор исследований по сжимаемости горных пород и их пустот изложены также в монографиях [4,5]. Однако для целей гидродинамического анализа и применения к прогнозу фильтрационных свойств коллекторов нам потребуется несколько иной подход и более детальная трактовка вводимых понятий.

Модуль упругости тела, содержащего пустоты.

Горные породы, как правило, содержат пустоты в виде поровых каналов, трещин и каверн. Образцы твердых тел или металлов, подлежащих к испытаниям, также могут иметь пустоты разных форм в виде отверстий, пазов, выемок и прочих конструктивных форм. Зададимся вопросом, как

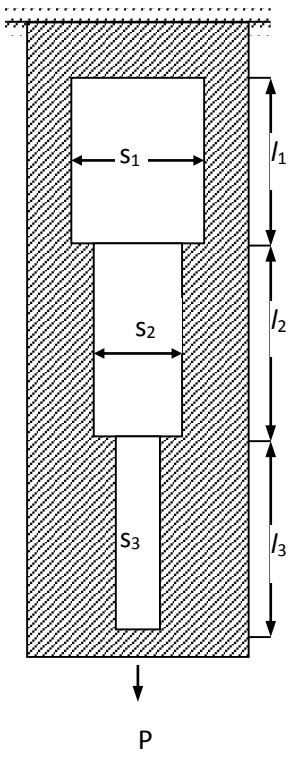


Рис.24.1 Образец с пустотами

влияет на основные замеряемые механические характеристики наличие в испытуемом образце пустот того или иного определенного вида.

Пусть образец длины L и поперечного сечения S подвергается простой деформации растяжения-сжатия. Если бы образец был сплошным, то его модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν можно было бы установить по научно-техническим справочным материалам. Замеряемые значения при наличии пустот в образце, очевидно, будут другими. Модуль упругости E' окажется меньше, а коэффициент Пуассона ν' больше или меньше, то есть $E'<E$, $\nu'\neq\nu$. Характер пустот в образце отразится на замеренных значениях механических характеристик, о деформациях образца и пустот этого же образца можно будет судить по замеренным и справочным величинам E, E', ν и ν'.

Рассмотрим простой пример растяжения стержня с пустотами. И для простоты суждений возьмём пустоты ступенчатого вида, как показано на рис.1. Площадь сечения образца везде одинакова, но площади пустот меняются по ступенчатому закону: l_1 и s_1 -длина и площадь первой пустотности; l_2 и s_2 -длина и площадь второй пустотности; и т.д.; l_n и s_n -длина и площадь последней пустотности. Площадь твердого вещества на каждом из участков есть S-s_i. Одна и та же нагрузка P приходится на каждое сечение, растягивающие напряжения будут разными для разных участков $\sigma_i=P/(S-s_i)$, потому и относительные удлинения стержня на каждом из участков окажется разным, $\varepsilon_i=\sigma_i/E$. Общее удлинение стержня с пустотами ΔL получим, если просуммируем удлинения каждого из звеньев Δl_i. Для общности в эту же сумму можно добавить и участок длины l_o нулевой пустотности, s_o=0. Относительное удлинение всего образца выразится формулой

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{P}{ES}\cdot\frac{1}{L}\sum_0^n\frac{l_i}{1-s_i/S}=\frac{P}{E'S}, \qquad (24.1)$$

Очевидно, дробь s_i/S представляет пустотность сечения и естественно обозначить его m_i. Величина E′ представляет собой модуль упругости образца с пустотами. Он связан с модулем упругости твердого тела, однако зависит от структуры пустот и распределения величин пустот по образцу. В нашем случае

$$E' = \frac{E}{\frac{1}{L}\sum_{0}^{n}\frac{l_i}{1-m_i}} \qquad (24.2)$$

Итак, мы получили формулу для оценки значения кажущегося модуля упругости стержня, содержащего пустоты. Здесь E' замеренное значение для образца, тогда как E истинный модуль упругости твердого материала, из которого изготовлен образец. При $m_i \to 0$ получаем $E' \to E$.

Даже в этом рассмотренном случае, когда по длине образца работают на растяжение почти все участки, замеренное значение модуля упругости E' может оказаться заметно меньшим модуля упругости твердого вещества E. Например, при относительных длинах пяти участков 0.2 и пустотах m_i=0; 0.01; 0.02; 0.05 и 0.9 получается средняя пустотность образца 20%, а кажущийся модуль упругости образца E'=0.355E. Что же касается горных пород, их пустотное пространство испещрено шероховатостями и значительная доля твердого вещества не испытывает нагрузок от растяжения-сжатия. Зубцы, шероховатости и «висячие» участки твердого скелета породы подвержены просто перемещениям и не оказывают сопротивления растяжению и слабому сжатию. Тупиковые трещинки, зазубринки в порах могут постепенно подключаться к работе при сжатии. С этой точки зрения, формула (24.2) дает завышенные значения кажущегося модуля упругости образца, правильнее было бы ещё к пустотности в (24.2) добавить и ту часть твердого скелета, которая не подвергается деформациям.

Коэффициент Пуассона такого образца не остается равным его значению для твердого материала. Если образец рис.1 рассматривать как толстую трубу с переменным внутренним сечением, решение задачи растяжения – сжатия показывает, что каждый участок испытывает одинаковое поперечное относительное сжатие, причем на внешней поверхности смещение точек внутрь пропорционально

внешнему радиусу трубы, на внутренней поверхности точки также смещаются внутрь и их смещение также пропорционально внутреннему радиусу. В итоге, поперечное сжатие стенок труб пропорционально их толщине, пустотность трубы также испытывает относительное поперечное сжатие, пропорциональное тому же коэффициенту Пуассона. Это, однако, не значит, что пустотность не повлияет на поперечное сжатие стержня во всех случаях. Ниже будут приведены примеры, когда наличие пустот в стержне приводит к снижению или повышению коэффициента Пуассона для образца.

Резюмируя все вышесказанное, можно утверждать, что замеренные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для образца с внутренними пустотами (E', ν') будут другими, нежели для монолитных однородных образцов без пустот (E, ν). Как правило, наличие пустот изменяет замеряемые значения модуля упругости и коэффициента Пуассона. Более того, с ростом внешней нагрузки на образец и дальнейшим его сжатием часть трещин смыкается, площади контактов растут, растет сопротивляемость дальнейшему сжатию из-за подключения в напряженное состояние все новых участков скелета породы. Это значит, что замеренные значения (E', ν') будут, вообще говоря, функциями внешней приложенной нагрузки. Наша цель состоит в том, чтобы по этим четырем значениям упругих характеристик и пустотности m дать некоторые оценки изменения пустотного пространства при тех или иных малых изменениях напряженного состояния образца.

Ниже рассмотрены случаи изменения внешней нагрузки на образец породы и внутренней нагрузки на её скелет – изменения давления в поровом или трещинном пространстве.

Объемная деформация тела, содержащего пустоты.

При растяжении сплошного однородного стержня под действием одноосной нагрузки относительное изменение его объема выражается в виде [1]

$$\frac{\Delta V}{V} = (1-2\nu)\frac{\sigma}{E} \qquad (24.3)$$

где σ - продольное напряжение в стержне. При одинаковой по двум осям нагрузке на брусок это выражение следует удвоить, а при трехосном сжатии - растяжении утроить.

Рассмотрим случай стержня с пустотами, изображённый на рис. 24.1. Растяжение увеличивает не только общий объем образца с пустотами, но и объем пустот в этом образце. Поскольку все участки стержня с пустотами работают на одностороннее растяжение, то для каждого участка изменение относительного объема твердого вещества определяется формулой (24.3), причем осевые напряжения различны для разных участков. Складывая изменения объемов всех участков и учитывая, что нагрузка на твердое сечение P одинакова для всех участков, для абсолютного изменения объема твердой части образца получаем формулу

$$\Delta V_{тв} = (1-2\nu)\frac{PL}{E}, \quad V_{тв} = \sum_0^n (S - s_i) l_i, \tag{24.4}$$

Введем обозначение для общего объёма образца $V=SL$ и среднее значение пустотности

$$m = \frac{\sum_0^n s_i l_i}{SL}, \quad V_{тв} = (1-m)V \tag{24.5}$$

Тогда относительное изменение твердой части образца с пустотами выразится в следующей форме

$$\frac{\Delta V_{тв}}{V_{тв}} = \frac{1-2\nu}{1-m}\frac{P}{SE} = \frac{1-2\nu}{1-m}\frac{\sigma}{E}, \quad \sigma = \frac{P}{S} \tag{24.6}$$

Формула (24.6) совпадает с по существу с (24.3). Для случая наличия пустот за общее осевое напряжение для образца надо принять $\sigma'=\sigma(1-m)$, т.е. отнести нагрузку на среднюю площадь скелета, а не на все его поперечное сечение. Однако, мы сохраним запись (24.6), т.е. будем осевую нагрузку относить ко всей площади поперечного сечения образца, а не к скелетной части. Множитель $(1-m)$ означает, что вся приложенная к площадке нагрузка передается на твердый скелет, жидкая фаза в пустотах несущей способностью не обладает.

Получим аналогичную формулу для объемной деформации пустот. В общем случае провести суждение трудно, поэтому рассмотрим хорошо известный из учебной литературы простейший случай. Примем участки стержня с

пустотами за отрезки толстой трубы с одним и тем же внешним радиусом R и разными внутренними радиусами r_i. Тогда относительное сжатие внутреннего и внешнего радиусов одинаково. Под нагрузкой P новые значения радиусов каждого из участков и новые их длины составят

$$R' = R - \nu \frac{PR}{E(S - s_i)}, \quad r' = r - \nu \frac{Pr}{E(S - s_i)}, \quad l_i' = l_i + \frac{Pl_i}{E(S - s_i)} \tag{24.7}$$

Сосчитав новый объем пустот, получаем

$$\frac{\Delta V_{пуст}}{V_{пуст}} = \frac{1 - 2\nu}{m} \frac{P}{SE} = \frac{1 - 2\nu}{m} \frac{\sigma}{E}, \quad \sigma = \frac{P}{S} \tag{24.8}$$

Формулы (24.6) и (24.8) дают значения объемной сжимаемости твердого скелета и пустот от приложенной внешней одноосной нагрузки. Коэффициенты сжимаемости

$$\beta_{тв} = \frac{\Delta V_{тв}}{V_{тв} \Delta\sigma} = \frac{1 - 2\nu}{(1 - m)E}, \quad \beta_{пуст} = \frac{\Delta V_{пуст}}{V_{пуст} \Delta\sigma} = \frac{1 - 2\nu}{mE} \tag{24.9}$$

Если бы при определении коэффициентов сжимаемости изменение объемов твердой части и пустот относили к общему объему породы, то в (24.9) отсутствовали бы множители с пустотностью m. Оба коэффициента тогда имели бы одинаковые значения, совпадающие с коэффициентом сжимаемости образца. Однако, мы будем придерживаться общепринятых обозначений. Первая из этих формул годится в общем случае, вторая, сжимаемости пустот, выведена для круглой толстой трубы с различными внутренними радиусами. Она имеет ограниченное применение.

Коэффициент сжимаемости образца с пустотами в целом можно найти следующим образом: выразим общий объем образца как сумму объемов твердого скелета и пустот; используем также связь общего объема образца с ними через среднюю пустотность m. Тогда

$$\beta = \frac{dV}{Vd\sigma} = \frac{dV_{тв}}{V_{тв} d\sigma} \frac{V_{тв}}{V} + \frac{dV_{пуст}}{V_{пуст} d\sigma} \frac{V_{пуст}}{V} = (1 - m)\beta_{тв} + m\beta_{пуст} \tag{24.10}$$

Отметим, что формула (10) годится не только для одноосного сжатия, но и для любого сложного напряженного состояния, так как здесь использовано лишь свойство аддитивности объёмов. Ею лучше пользоваться для определения сжимаемости пустот по замерам сжимаемости образца породы β.

Относительное изменение объема образца коллектора, содержащего пустоты, для случая одноосного сжатия-растяжения можно представить в виде (24.1) с кажущимися замеренными значениями модуля упругости E' и коэффициента Пуассона ν'. Подставляя соответствующие значения в формулу (24.10), имеем

$$\beta = \frac{\Delta V}{V \Delta \sigma} = \frac{1-2\nu'}{E'} = \frac{1-2\nu}{E} + m\beta_{пуст} \qquad (24.11)$$

Отсюда получаем для сжимаемости пустот удобное представление

$$\frac{\beta_{пуст}}{\beta_{тв}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1-2\nu'}{1-2\nu} \cdot \frac{E}{E'} - 1\right) \qquad (24.12)$$

В правой части все величины замеряемые, штрихами обозначены характеристики породы, без штрихов характеристики монолитного твердого вещества породы. С ростом внешней сжимающей нагрузки на образец (или горного давления в естественных условиях) модуль упругости E' увеличивается, а сжимаемость пустот уменьшается. Ориентировочно можно полагать, что при небольшом интервале изменения внешней нагрузки E' есть линейная функция от внешней приложенной нагрузки или горного давления.

Приведем пример оценки сжимаемости пустот гранитного коллектора. Для монолитного образца гранита, согласно справочным данным [2], модуль упругости E=4.9·10^4 МПа, коэффициент Пуассона ν=0.3. Согласно замеренным данным, среднее значение модуля упругости образцов пород для залежи фундамента составляет E'=1.44·10^4 МПа, коэффициент Пуассона ν'=0.3. Средняя пустотность тех же гранитных образцов оценивается в 2%.Таким образом, E/E'=3.4. Согласно формуле (12) $\beta_{пуст}/\beta_{тв}$=120. То есть сжимаемость пустот в 120 раз превосходит сжимаемость твердого вещества гранита.

Для одноосного сжатия-растяжения по формуле (24.9) находим $\beta_{тв}$=0.0833·10^{-4}МПа$^{-1}$. Умножив на 120, получаем, что $\beta_{пуст}$=10·10^{-4}МПа$^{-1}$. Если воспользоваться второй из формул (24.9), которая годится лишь для случая пустот типа трубы, то будет получено меньшее значение, $\beta_{пуст}$=4.08·10^{-4}МПа$^{-1}$.

В случае сложного напряженного состояния сжимаемость становится больше. Например, для трехосного сжатия кубика

эти значения утроятся, $\beta_{тв}$=0.25·10^{-4}МПа$^{-1}$, $\beta_{пуст}$=30·10^{-4}МПа$^{-1}$. Однако эти значения относятся к изменению внешних воздействий на скелет породы, тогда как в процессе эксплуатации залежи меняется нормальное давление на поверхность пустот. Изменение внутреннего давления создает несколько отличное от рассмотренного выше напряженное состояние в коллекторе, изменение горного и пластового давлений по-разному сказывается на сжимаемости пустот коллектора.

Отметим также, что здесь использованы модуль упругости и коэффициент Пуассона при поверхностных условиях, тогда как в залежи, при высоких давлениях и температурах, они будут иметь несколько отличные значения. Вполне вероятно, что полученное здесь значение $\beta_{пуст}$ заметно больше его фактического значения для пластовых условий залежи фундамента.

Понятие сжимаемости пустотного пространства коллектора иногда теряет смысл. В этих особых случаях приходится говорить об изменении пустотного пространства залежи, не прибегая к понятию сжимаемости пустот.

Рассмотрим задачу растяжения стержня длины L квадратного сечения со стороной a, разрезанного вдоль осей симметрии на 4 равные части. При растяжении каждый из 4-х стержней будет испытывать поперечное сжатие, в результате чего появятся две продольные трещины (рис. 24.2). Подсчитаем отношение объема пустот к начальному объему стержня.

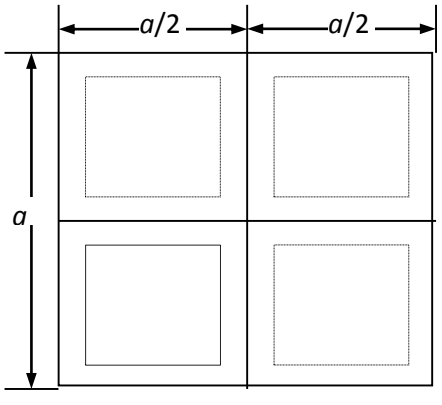


Рис.24.2. Сечение стержня

Относительные деформации каждого стержня составят $\varepsilon=\sigma/E$. Каждый из стержней испытывает поперечное относительное сжатие $-\nu\varepsilon$, поперечные размеры $a/2$, после растяжения, преращаются в $(1-\nu\varepsilon)a/2$, раскрытость обеих внутренних взаимно перпендикулярных трещин составит $\nu\varepsilon a/2$, поперечное сечение их $\nu\varepsilon a^2$, объем появившихся после растяжения трещин $\nu\varepsilon\cdot a^2L=\nu\varepsilon\cdot V$, где V-первоначальный объем стержня.

Итак, в начале пустот не было в стержне, после растяжения они появились, причем объем появившихся

пустот по отношению к первоначальному объему образца составляет $\nu\varepsilon=\nu\sigma/E$. Сжимаемость пустот в общепринятом понимании теряет смысл, так как объём пустот до растяжения нулевой, и знаменатель выражения $\beta_{пуст}=\Delta V_{пуст}/V_{пуст}$ оказывается равным нулю. То есть в принятом понимании коэффициент сжимаемости пустот оказывается бесконечным, хотя приращение объема пустот очень мало. В таких особых случаях лучше относить изменения объема пустот и твердого вещества к общему объему образца породы V. В нашем случае

$$\frac{\Delta V_{тв}}{V}=(1-2\nu)\frac{\sigma}{E},\quad \frac{\Delta V_{пуст}}{V}=\nu\frac{\sigma}{E},\quad \frac{\Delta V}{V}=(1-\nu)\frac{\sigma}{E} \qquad (24.13)$$

Заметим, что в особых случаях такого рода очевиднее становится связь сжимаемости с напряженным состоянием образца. В нашем случае, если растяжение заменить сжатием, то никакого пустотного пространства не образуется, сжимаемость пустот надо принять за нуль. Если трещины нулевой раскрытости в стержне расположены под малым углом к её оси или перпендикулярны, то после растяжения трещины раскроются. Снова будем иметь особый случай, но формулы (24.13) не имеют места, вместо них могут быть выписаны более сложные.

Основной вывод, который напрашивается из приведенного выше примера, состоит в том, что понятие сжимаемости пустот породы при внешней приложенной нагрузке отличается от аналогичного понятия сжимаемости жидкостей и газов. Коэффициент сжимаемости пустот в общепринятом понимании зависит не только от геометрии пустотного пространства, но и от характера изменения напряженного состояния скелета породы. Значения коэффициента сжимаемости пустот становятся ненадежными при очень малых значениях пустотности. В таких случаях лучше полагаться на расчетные результаты.

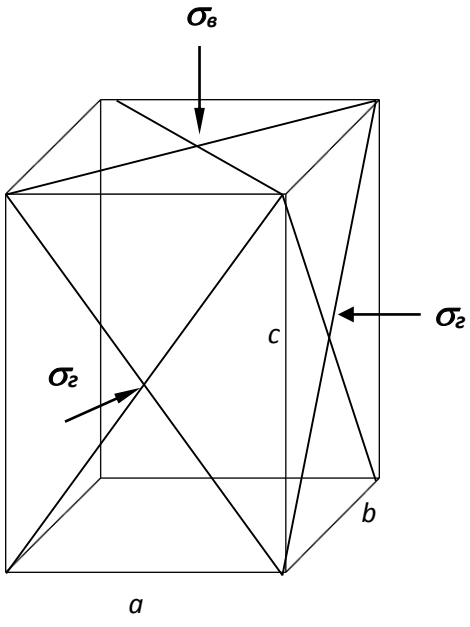


Рис.24.3. Элемент породы

Объемные деформации породы при трехосном растяжении-сжатии.

Осадочные породы, как правило, анизотропные. Модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν породы

зависят от выбора направления в породе. Как правило, различают их для вертикального и горизонтального направлений. Обычно по вертикали модуль упругости имеет меньшее значение, нежели по горизонтали. Не осадочного характера (вулканические) породы можно считать изотропными.

Обозначим: $E_в$ и $E_г$ –модули упругости породы; $\nu_в$ и $\nu_г$ – коэффициенты Пуассона; $\sigma_в$ и $\sigma_г$ – напряжения для вертикального и горизонтального направлений (рис. 24.3) выделенного элемента породы с размерами *а, в* и *с*. Согласно закону Гука, для относительных деформаций

$$\varepsilon_г = \frac{1}{E_г}\left[\sigma_г - \nu_г(\sigma_г + \sigma_в)\right], \quad \varepsilon_в = \frac{1}{E_в}\left[\sigma_в - 2\nu_в\sigma_г)\right] \qquad (24.14)$$

Изменение объема породы представится в виде $a(1+\varepsilon_г)\cdot в(1+\varepsilon_г)\cdot c(1+\varepsilon_в)-авс \approx (2\varepsilon_г+\varepsilon_в)авс$. Подставив значения из (14), для относительного изменения объема элемента получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\left(\frac{1-\nu_г}{E_г} - \frac{\nu_в}{E_в}\right)\sigma_г + \left(\frac{1}{E_в} - \frac{2\nu_г}{E_г}\right)\sigma_в \qquad (24.15)$$

Эта формула показывает, что вводить единый коэффициент β объёмного сжатия можно лишь условно. Изменение объема зависит оттого, какая составляющая напряжения меняется. При изменении горизонтальной составляющей напряжения и сохранении её вертикальной составляющей за сжимаемость общего объёма следует принять

$$\beta_г = 2\left(\frac{1-\nu_г}{E_г} - \frac{\nu_в}{E_в}\right) \qquad (24.16)$$

Однако при изменении вертикальной составляющей напряжения и сохранении её горизонтальной составляющей за сжимаемость общего объёма следует принять

$$\beta_в = \frac{1}{E_в} - \frac{2\nu_г}{E_г} \qquad (24.17)$$

Если же одновременно меняются оба напряжения, то объемную сжимаемость следовало бы определить с учетом их функциональной зависимости. Чтобы избежать разночтения, принято за объемную сжимаемость породы брать значение при равенстве обеих составляющих напряжения, т.е. при

$\sigma_г=\sigma_в=\sigma$. Для коэффициента объемной сжимаемости анизотропной породы получаем

$$\beta = \beta_г + \beta_в = \frac{1-2\nu_в}{E_в} + 2\frac{1-2\nu_г}{E_г} \qquad (24.18)$$

В качестве примера приведем значения сжимаемости глинистых сланцев, обладающих достаточно ярко выраженной анизотропией [4]. Модули упругости их: по напластованию $E_г$=3.16·10^4 МПа; перпендикулярно напластованию $E_в$=1.54·10^4 МПа. Коэффициенты Пуассона одинаковы и составляют $\nu=\nu_г=\nu_в$=0.22. Согласно формул (24.16-18) имеем: $\beta_г$=0.208; $\beta_в$=0.510; β=0.718·10^{-4} МПа$^{-1}$. Очевидно, при любом напряженном состоянии сжимаемость останется меньшей полученного здесь значения β. Например, при изменении вертикальной нагрузки $\sigma_г$ боковая составляющая меняется слабее, её приращение составляет примерно до 40% изменения вертикальной нагрузки, поэтому при определении относительного изменения объёма по формулу (4.2) от первого слагаемого до 40% её значения. Это значит, что (4.5) дает, вообще говоря, завышенные значения сжимаемости анизотропных горных пород. Для глинистых сланцев полученное значение β=0.718·10^{-4} МПа$^{-1}$ также завышено, но порядок величин сохранился. Как правило, для пород-коллекторов значения коэффициента сжимаемости пород β находятся в пределах от 0.1 до 1·10^{-4} МПа$^{-1}$.

В горных породах вертикальная нагрузка известна, это вес вышележащих горных пород. Под действием вертикальной нагрузки возникают и горизонтально направленные её составляющие, которые по всем направлениям считаются одинаковыми, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_г$.

В жидкости, где под действием малых напряжений возможны бесконечно большие деформации, нормальная составляющая напряжения не зависит от ориентации площадки. Здесь вертикальная нагрузка передается по всем направлениям одинаково. Это и есть гидростатическое давление в жидкости. На больших глубинах порядка десятков и сотен *км*, под действием высоких давлений и температур, горная порода также становится текучей, и можно полагать, что горное давление передается по всем направлениям

одинаково. Но в твердом скелете горной породы в боковом направлении горное давление передается лишь частично.

Определим возможные значения бокового распора $\sigma_г$, исходя из предпосылки, что в достаточно протяженном коллекторе при изменении горного давления горизонтальных деформаций породы не происходило. То есть в формулах (4.1) положим $\sigma_в=\rho g H$, а $\varepsilon_г=0$. Для горизонтальной составляющей будет получено

$$\sigma_г = \frac{\nu_г}{1-\nu_г}\sigma_в, \quad \varepsilon_в = \left(1-\frac{2\nu_г\nu_в}{1-\nu_г}\right)\cdot\frac{\sigma_в}{E_в} \tag{24.19}$$

Поскольку наша предпосылка запрещает горизонтальные относительные деформации, разрешая лишь вертикальное сжатие породы, то и для объемной деформации породы теперь можно из (24.14) выписать простое выражение

$$\beta = \left(1-\frac{2\nu_г\nu_в}{1-\nu_г}\right)\cdot\frac{1}{E_в} \tag{24.20}$$

Новая формула отличается от общепринятой формулы (24.18), но имеет ограниченное применение. Формула (24.20) дает зависимость коэффициента сжимаемости коллектора от изменения горного давления. В отличие от (18) она не завышает значения коэффициента сжимаемости пород. Примечательно, что модуль упругости в горизонтальном направлении не отразился на полученном нами значении коэффициента сжимаемости от горного давления. Это следствие принятого предположения отсутствия горизонтальных смещений пород.

Заметим, что формулу (24.20) можно получить также и из (24.15), если воспользоваться первой из формул (24.19), т.е. зависимостью бокового распора от горного давления. В ней под модулем упругости и коэффициентами Пуассона имеется в виду их значения для горных пород, которые в свою очередь зависят от одноимённых характеристик твердого вещества породы и пустотности: объема пустот, его распределения по трещинам, порам и кавернам, характера трещин и т.п.

Подсчитаем для глинистых сланцев сжимаемость породы для вертикальной нагрузки, направленной перпендикулярно напластованию. Как и выше, $E_в=1.54\cdot10^4$ МПа, $\nu_г=\nu_в=0.22$. По формуле (24.20) имеем $\beta=0.569\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$ вместо ранее

полученного завышенного значения β=0.718·10^{-4} МПа$^{-1}$. Как мы видим, разница полученных величин не является существенной, формулы дают величины одного порядка и уточняют друг друга. Формула (24.20) вполне приемлема для проведения расчетов, если достаточно надежно замерены коэффициенты Пуассона и модули упругости породы.

Сжимаемости пустот трещинного коллектора.

На сжимаемость коллектора влияет не только внешняя нагрузка от вышележащих горных пород, но и давление флюидов, наполняющих трещинно-поровое пространство. Для применения метода материального баланса к определению запасов нефти в залежи важно знать зависимость сжимаемости пустотного пространства залежи от изменения пластового давления. Горное давление в процессе эксплуатации залежи остается неизменным, снижается внутрипоровое давление флюидов в коллекторе. Малые деформации скелета породы и трещинно-порового пространства коллектора при разработке залежи нефти на упругом режиме обусловлены изменениями пластового давления.

Сохраним определения коэффициента сжимаемости породы, пустотного пространства и твердого скелета такими же, как и ранее были описаны для случая внешней нагрузки на образец породы. Разница лишь в том, что теперь вместо осевых напряжений на образец породы в качестве независимой переменной имеем давление в жидкости, действие которого распределено по внутреннему поровому объёму. Итак, для коэффициентов сжимаемости породы, её пустотного пространства и её твердого скелетообразующего вещества принимаем

$$\beta = \frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dp}, \quad \beta_{пуст} = \frac{1}{V_{пуст}}\cdot\frac{dV_{пуст}}{dp}, \quad \beta_{тв} = -\frac{1}{V_{тв}}\cdot\frac{dV_{тв}}{dp}. \qquad (24.21)$$

При таком определении сохраняется приведённая выше для случая внешней нагрузки формула

$$\beta = m\beta_{пуст} - (1-m)\beta_{тв} \qquad (24.22)$$

Но теперь смысл несколько другой, понятия сжимаемости относятся к изменению пластового давления. Пластовое давление действует на внутреннюю поверхность скелета, его

рост приводит к малому снижению объема твердой фазы и повышению объема пустот. В условиях постоянства горного давления, рост пластового давления приводит к малому росту и объема породы. Поэтому $\beta_{пуст}>0$, $\beta_{тв}>0$, $\beta>0$.

Получим ориентировочные выражения для каждого из этих коэффициентов сначала в случае трещинных, а затем и порово-трещинных коллекторов, основываясь на простых схематических представлениях структуры их пустот. Представим себе трещинную среду состоящей из вертикально расположенных монолитных квадратных брусков породы и двух систем вертикальных трещин между ними. Сечение бруска $b\times b$, раскрытость трещин составляет 2δ. На рис. 4 изображено поперечное сечение четырех соседних брусков и показаны две системы трещин. Высота брусков равна l. При этих обозначениях для объема одного элемента породы имеем значение $V=(b+\delta)^2 l$, при объеме содержащегося в элементе твердого веществ $V_{тв}=b^2 l$. Объем пустот одного элемента выражается в виде их разности $V_{пуст}=(b+\delta)^2 l-b^2 l$. Коллектор имеет трещинную пустотность

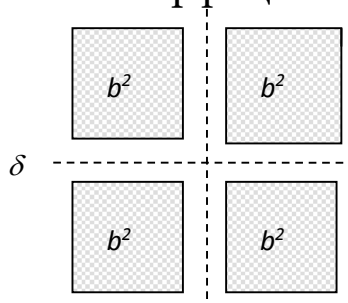


Рис.24.4. Сечение бруса

$$m=\frac{(b+\delta)^2-b^2}{(b+\delta)^2}=1-\frac{1}{(1+\delta/b)^2} \qquad (24.23)$$

Каждый из брусков испытывает поперечное сжатие от действия пластового давления p, а также продольное сжатие вдоль вертикали от действия горного давления σ. Относительные деформации бруска с учетом его анизотропии в упругой области в соответствии с законом Гука запишутся в виде

$$\varepsilon_г=\frac{1}{E_г}\left(p-\nu_г(p+\sigma)\right),\quad \varepsilon_в=\frac{1}{E_в}\left(\sigma-2\nu_в p\right) \qquad (24.24)$$

Новый объем твердого бруска, сжатый действием двух нагрузок σ и p, имеет вид

$$V'_{тв}=b^2 l\cdot(1-\varepsilon_г)^2(1-\varepsilon_в)\approx V_{тв}(1-2\varepsilon_г-\varepsilon_в),$$

что позволяет найти относительное изменение объема твердой части породы из-за совместного действия пластового и горного давлений

$$-\frac{\Delta V_{тв}}{V_{тв}} = 2\varepsilon_г + \varepsilon_в = 2\left(\frac{1-\nu_г}{E_г} - \frac{\nu_в}{E_в}\right)p + \left(\frac{1}{E_в} - \frac{2\nu_г}{E_г}\right)\sigma \qquad (24.25)$$

Теперь видно, какая часть нагрузки и как будет сказываться на сжимаемости твердой породы. Изменению пластового давления соответствует множитель при p в формуле (24.25), а изменению горного давления соответствует множитель при σ. При постоянном значении горного давления σ коэффициент сжимаемости твердого вещества можно принять равным

$$\beta_{тв} = 2\left(\frac{1-\nu_г}{E_г} - \frac{\nu_в}{E_в}\right) \qquad (24.26)$$

Однако надо помнить, что применения (26) ограничены достаточно жесткими рамками принятых предположений о том, что коллектор сложен из трещин и монолитных блоков, вся нагрузка от вышележащих горных пород приходится на скелет коллектора, в процессе добычи нефти меняется лишь давление в жидкости, заполняющей трещины.

При принятых выше условиях объем горной породы в целом также испытывает изменение. С ростом давления в жидкости, действующего поперек брусков и сжимающего его сечение, длина бруска растет в соответствии со второй из формул (24.24). Общее же поперечное сечение породы не меняется, так как уменьшение сечения компенсируется увеличением раскрытости трещин. Для изменения объема породы имеем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E_в}(\sigma + 2\nu_в p) \text{, или} \quad \beta = \frac{2\nu_в}{E_в} \qquad (24.27)$$

Теперь коэффициент сжимаемости пустот можно подсчитать двояко: по формуле (24.10) или же непосредственно, учитывая расширение трещины и малое удлинение несущих горное давление брусков под действием поперечного сжатия. Приводим только конечный результат:

$$\beta_{пуст} = \frac{2(1-m)(1-\nu_г)}{mE_г} + \frac{2\nu_в}{E_в} \qquad (24.28)$$

Например, для пустотности 2% и при значениях $E_г$=4.9·10^4 МПа, $E_в$=1.55·10^4 МПа, $\nu_г$=$\nu_в$=0.3 получаем из (24.28) $\beta_{пуст}$=(14+0.387) ·10 $^{-4}$ МПа$^{-1}$, что согласуется с общепринятыми

значениями. Основной вклад в (24.28) вносит первый член. При очень малых значениях пустотности (менее 0.5%) формула (24.28) приводит к большим значениям сжимаемости $\beta_{пуст}$.

Ниже в таблице 24.1 даны замеренные в лабораторных условиях значения механических характеристик образцов керна, извлеченных из залежи фундамента месторождения Белый Тигр. Замеры эти проводились во ВНИИнефти [6] по контракту с НИПИморнефтегаз СП «Вьетсовпетро». Сжимаемости вычислены по формулам (24.28), (24.26) и (24.27). Высокие значения $\beta_{пуст}$ получены для образцов песчаника из скв.1106 и при пустотности 0.32%. Среднее по всем данным здесь 10 образцам значение сжимаемости $\beta_{пуст}$ составило $19.12 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$, тогда как по шести образцам трещинных гранитов среднее значение составило $9.89 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$.

В условиях высоких давлений и температур, что имеет место на больших глубинах, механические характеристики горных пород могут заметно отличаться от замеренных в поверхностных условиях. Значения коэффициента сжимаемости пустот убывают с ростом глубины залегания пород и горного давления. Наиболее вероятные значения сжимаемости пустот трещинного гранитоидного коллектора - $10 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$.

Таблица 24.1. Замеренная сжимаемость образцов кернов.

Скв.	H, м	ρ, т/м^3	m, %	E·10^{-4}	ν	$\beta_{пуст} \cdot 10^4$	$\beta_{тв} \cdot 10^4$	$\beta \cdot 10^4$
7	4176	2.63	0.85	9.3	0.357	16.207	0.0615	0.0768
100	4375	2.31	4.27	9.24	0.314	3.397	0.0805	0.0680
445	4585	2.62	0.6	16.6	0.4	12.024	0.0241	0.0482
446	4205	2.68	0.96	10.6	0.482	10.174	0.0068	0.0909
907	4532	2.63	1.45	8.6	0.347	10.402	0.0712	0.0807
1106	4159	2.4	7.29	1.1	0.272	17.328	0.8291	0.4945
1106	4205	2.38	8.35	0.75	0.412	18.309	0.4693	1.0987
446	3986	2.66	1.87	9.93	0.333	7.117	0.0673	0.0671
431	4336	2.67	0.33	9.42	0.326	43.290	0.0739	0.0692
503	4526	2.69	0.32	7.44	0.369	52.937	0.0704	0.0992

В процессе эксплуатации трещинной залежи пластовое давление снижается и в этой связи актуальным является вопрос об уменьшении раскрытости трещин и падении

значения проницаемости коллектора. Насколько значительно падение проницаемости и надо ли его учитывать в прогнозных показателях разработки залежи с трещинным коллектором?

Как следует из (24.24), при снижении пластового давления на малую величину $dp>0$, размер блока b увеличится на величину $db= b\varepsilon_г$, но зазор между блоками уменьшится ровно на эту же величину, по $db/2$ с каждого конца блока. Изменение зазора выразится в виде

$$d\delta = b\frac{1-\nu_г}{E_г}dp \qquad (24.29)$$

причем с уменьшением пластового давления уменьшается и зазор δ. Проницаемость трещин пропорциональна кубу раскрытости, и для роста проницаемости с ростом пластового давления получаем

$$\beta_k = \frac{dk}{kdp} = \frac{3d\delta}{\delta dp} = 3\frac{b(1-\nu_г)}{\delta E_г} = \frac{6(1-\nu_г)}{mE_г} \qquad (24.30)$$

Для гранитов E=4.9·10^{-4}МПа и ν=0.3. Изменение проницаемости будет зависеть от значения трещинной пустотности m. Например, для m= 0.5%, 1%, 2% и 3% получаем значения β_k=0.0171; 0.00857; 0.00429 и 0.0286 МПа$^{-1}$ соответственно. Для таких значений β_k снижение пластового давления на 14 МПа (как это имеет место в случае залежи фундамента Белого Тигра), означает снижение проницаемости на 24%, 12%, 6% и 4% соответственно.

Естественно обсудить ещё вопрос о таком снижении пластового давления, при котором трещины смыкаются и проницаемость становится равной к нулю. Очевидно, это будет при $d\delta=\delta/2$. Из формулы (24.29), после замены, получаем

$$\Delta p_{смык} = \frac{\delta E_г}{2b(1-\nu_г)} = \frac{m}{4}\cdot\frac{E_г}{1-\nu_г} \qquad (24.31)$$

Снижение давления, при котором происходит смыкание трещин, как показывает эта формула, является очень большим, и в большинстве случаев невозможным. Даже для мягких пород с $E_г$=1·10^{-4} МПа, $\nu_г$=0.35 и трещинной пустотностью 1% из (5.11) получаем, что трещины сомкнутся после снижения пластового давления на 38.5 МПа. Смыкание трещин, прежде всего, происходит на участках очень малой пустотности.

Сжимаемость пустот порового коллектора.

Перейдём теперь к рассмотрению порового коллектора и изучению характеристик её сжимаемости в зависимости от изменения пластового (внутрипорового) давления, при сохранении постоянного значения горного давления. Снова выделим характерный элемент поровой среды, состоящий из одной изолированной поры и ограниченного объема твердого вещества. Для простоты геометрическую форму поры примем круглой, окружающей породы кольцевой, чтобы можно было применить известные решения из теории упругости. Таким образом, задача сводится к изучению деформаций толстой трубы, внутри которой давление равно пластовому, а на внешней поверхности трубы давление равно горному. Отношение площади внутреннего сечения трубы к площади всего сечения можно рассматривать как пористость коллектора. На возможность такого подхода указано в [4], но задача определения сжимаемости не ставится. Здесь мы определим все деформационные характеристики: сжимаемости пустот, породы и твердого вещества.

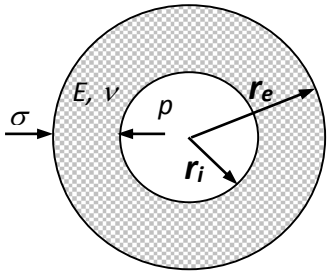


Рис.24.5. Сечение поры

Как показано в [1,2], неограниченная однородная труба, под действием внутреннего давления p и нормального внешнего давления σ, испытывает в твердой своей части напряжения, радиальная и окружная составляющие которых представимы в виде

$$\sigma_t = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_r = A + \frac{B}{r^2} \tag{24.32}$$

причем A и B есть постоянные, определяемые из граничных условий. При этом радиальная деформация точек (абсолютное их смещение) определяется согласно закону Гука [1]

$$u = r\varepsilon_t = \frac{r}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_r) = \frac{r}{E}\left[(A - \frac{B}{r^2}) - \nu(A + \frac{B}{r^2})\right] \tag{24.33}$$

Определим постоянные A и B. Радиальная составляющая напряжения σ_r равна пластовому давлению p при $r=r_i$, т.е. на

внутренней поверхности поры. Она же равна горному давлению σ на внешней поверхности поровой трубки при $r=r_e$. Подставляя в (6.1), получаем

$$A = \frac{\sigma r_e^2 - p r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}, \quad B = \frac{p - \sigma}{r_i^{-2} - r_e^{-2}} \tag{24.34}$$

Теперь удобнее сначала найти расширение площади концентрического круга радиуса r, а затем перейти к частным случаям расширения сечения порового канала и общего его сечения вместе с окружающим пору твердым веществом. Поскольку смещения точек определены формулой (24.33), то расширение площади составит $2\pi ru$, и, разделив на площадь круга πr^2, получим относительное значение расширения $2u/r$, т.е. в формуле (24.33) при квадратной скобке вместо радиуса r появится 2. Относительное увеличение объемов пустот и в целом породы выражаются одинаковыми формулами, но с разными значениями радиусов

$$\frac{\Delta V_{пуст}}{V_{пуст}} = \frac{2}{E}\left[(1-\nu)A - (1+\nu)Br_i^2\right], \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{E}\left[(1-\nu)A - (1+\nu)Br_e^2\right] \tag{24.35}$$

Формулы (24.34) и (24.35) дают возможность найти сжимаемости пустот и породы как при изменении пластового давления p, так и при изменении горного давления σ. Чтобы получить соответствующие представления, следует найти производные отмеченных в (24.35) выражений по пластовому давлению или по горному давлению. Соответственно будем иметь коэффициенты сжимаемости для разных двух случаев: в связи с изменением пластового давления или в связи с изменением горного давления. Значения эти разные.

Выкладки показывают, что при изменении пластового давления p в упругой области деформаций за коэффициенты сжимаемости пустот $\beta_{пуст}$ и в целом породы β следует принять

$$\beta_{пуст} = \frac{2}{E}\left(\frac{1+m}{1-m} + \nu\right); \quad \beta = \frac{4m}{(1-m)E}, \quad m = \frac{r_i^2}{r_e^2}. \tag{24.36}$$

Здесь мы попутно использовали значение пустотности m как отношение площади сечения поры к площади сечения выделенного элемента. В рамках принятой модели это очевидно. Обратим также внимание на зависимость коэффициентов сжимаемости от пустотности, по которой шли дискуссии в технической литературе [3]. Сжимаемость пород

растет с ростом пористости, тогда как на сжимаемость порового пространства влияние пустотности m мало.

Аналогичные выкладки показывают, что при изменении горного давления σ в упругой области деформаций за коэффициенты сжимаемости пустот $\beta_{пуст}$ и в целом породы β следует принять

$$\beta_{пуст} = \frac{4}{(1-m)E}; \quad \beta = \frac{2}{E}\left(\frac{1+m}{1-m} - \nu\right) \qquad (24.37)$$

Знаки при этом подбирались таким образом, чтобы получить для коэффициентов сжимаемости положительные значения. Очевидно, объемы пустот и в целом породы растут с ростом пластового давления p и убывают с ростом горного давления σ. Но значения коэффициентов сжимаемостей различны и не сводятся к изменению знака.

Сжимаемость пустот трещинно-порового коллектора.

В трещинно-поровом коллекторе общую пустотность m можно считать состоящей из двух частей: пустотности порового пространства, сосредоточенной в ограниченных трещинами блоках, и пустотности трещинного межблочного пространства. Блоки, в отличие от пункта 5, будем считать не монолитными образованиями, а пористыми коллекторами. Изменение пластового давления передается не только на поверхность блоков, обеспечивая их сжатие, но и внутрь блока в поровое его пространство, частично компенсируя внешнее сжатие скелета внутренним его расширением.

Будем различать две пустотности: трещинную $\phi_т$ и блоковую $\phi_б$. Общая пустотность есть их сумма, $m=\phi_т+\phi_б$. Введем также и доли видов пустотности в общем объеме пустот: $D_т=\phi_т/m$; $D_б=\phi_б/m$. Коэффициент сжимаемости пустот в зависимости от пластового давления p определим равенством

$$\beta_{пуст} = \frac{1}{m}\frac{dm}{dp} = \frac{\phi_т}{m}\frac{d\phi_т}{\phi_т} + \frac{\phi_б}{m}\frac{d\phi_б}{\phi_б} = D_т\beta_т + D_б\beta_б \qquad (24.38)$$

Таким образом, $\beta_{пуст}$ означает коэффициент сжимаемости общего объема пустот, тогда как $\beta_т$ и $\beta_б$ будут обозначать коэффициенты сжимаемости трещинных пустот и поровых пустот селективно. Общий коэффициент пустотности

представляет собой их среднее значение, взвешенное по долям.

Ставится задача определения сжимаемости пустот от изменения пластового давления. Что касается сжимаемости для случая изменения горного давления, то соответствующие им формулы также могут быть получены. Однако мы вынуждены опустить этот случай, чтобы не загромождать основной результат, имеющий прикладное значение, деталями.

Сжимаемость пустот будем считать на модели трещинно-поровой среды, близкой к общепринятой модели Уоррена-Рута [7]. Пусть блоки представляют собой вертикально расположенные бруски квадратного сечения $b \times b$ с трещинами раскрытости δ между блоками (рис. 24.4). Под действием внутреннего пластового давления p в блоке происходит расширение поперечного сечения блока и это расширение подсчитаем в предположении постоянства горного давления. Получим

$$\beta'_{пуст} = \frac{2}{E}\left(\frac{1+\phi_б}{1-\phi_б} + \nu\right), \; \beta'_{бл} = \frac{1}{b^2}\frac{db^2}{dp} = \frac{4\phi_б}{(1-\phi_б)E} \qquad (24.39)$$

Первая из этих формул характеризует сжимаемость порового пространства блоков, тогда как вторая дает расширение площади поперечного сечения блока в результате действия давления внутри блока. Модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν относятся к твердому веществу-монолиту, из которого сложен скелет породы.

От действия давления в трещинах на скелетную часть граней блоков их размеры, а также пустотность блока будет уменьшаться. Нагрузка, приходящаяся на единицу площади грани блока есть $p(1-\phi_б)$ и от её действия блок в целом деформируется согласно пункту 6, где вместо горного давления, действующего на внешнюю поверхность поры, следует принять это значение $p(1-\phi_б)$. Нагрузка на скелетную часть граней блока выступает в роли двустороннего горного давления. Сжимаемость для пустот и в целом для блока коллектора в новых обозначениях запишутся в виде

$$\beta''_{пуст} = \frac{4}{E}, \quad \beta''_б = \frac{2}{E}\left[(1+\phi_б) - \nu(1-\phi_б)\right] \qquad (24.40)$$

но их значения теперь надо брать с отрицательными знаками.

Учитывая, что малые деформации складываются с учетом их знаков, для пустотности блока и его общего объема имеем коэффициенты сжимаемости

$$\beta_{пуст} = -\frac{2}{E}\left[2 - \frac{1+\phi_б}{1-\phi_б} - \nu\right], \beta_б == -\frac{2}{E}\left[(1+\phi_б) - \nu(1-\phi_б) + \frac{2\phi_б}{1-\phi_б}\right] \quad (24.41)$$

Оба выражения для коэффициента сжимаемости объема пустот и общего объема блоков отрицательные, это значит, что в трещинно-поровой среде с ростом пластового давления происходит сжатие матричных блоков и их пор. При снижении же пластового давления будет иметь место расширение матричных блоков и их пустот. Но трещинная пустотность ведет себя противоположным образом. С увеличением пластового давления трещины расширяются, их пустотность растет.

Пользуясь определением трещинной пустотности, учитывая постоянство суммы размера блока и раскрытости трещины $b+\delta=const$, дифференцированием получаем

$$\beta_{тр} = -\frac{2}{\varphi_{тр}} \frac{b}{(b+\delta)^2} \frac{db}{dp} = - =\frac{1-\phi_m}{\phi_m} \cdot \frac{2db}{b} = -\frac{1-\phi_m}{\phi_m} \beta_б \quad (24.42)$$

Уменьшение поперечных размеров блока $\beta_{бл}$ уже определено вторым из равенств (24.41). Подставляя его, для коэффициента сжимаемости трещинной среды имеем выражение

$$\beta_{пуст,т} = \frac{1-\phi_m}{\phi_m} \frac{2}{E}\left[(1+\phi_б) - \nu(1-\phi_б) + \frac{2\phi_б}{1-\phi_б}\right] \quad (24.43)$$

С ростом пластового давления поровое пространство матричных блоков сужается, в то время как трещинная пустотность растет. Подставив в формулу (7.1) оба коэффициента сжимаемости, в целом для трещин и пор трещинно-порового коллектора получаем коэффициент сжимаемости пустот

$$\beta_{пуст} = \frac{2}{E} \frac{(1-\phi_m)\left[(1-\nu)(1-\phi_б)^2 - 2\phi_б\right] - \phi_б\left[1 - 3\phi_б - \nu(1-\phi_б)\right]}{(\phi_m + \phi_б)(1-\phi_б)} \quad (24.44)$$

Несмотря на свою кажущуюся громоздкость, формула дает возможность быстрой оценки сжимаемости пустот трещинно-порового коллектора. Ниже в таблице 2 приведены значения функции $℘=E\beta_{пуст}/2$ для коэффициентов Пуассона ν=0.2 и

ν=0.3 в зависимости от двух входных параметров: пористости матричных блоков и трещинной пустотности коллектора.

Таблица 24.2. Значения функции $\wp$ для определения сжимаемости трещинно-порового коллектора в зависимости от пустотности трещин и пористости матричных блоков.

ν=0.3	$\phi_б$							
ϕ_m	0.005	0.01	0.02	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
0.003	86.36	52.61	29.13	19.88	11.849	5.419	3.192	2.062
0.005	68.95	45.50	26.74	18.70	11.395	5.304	3.144	2.038
0.010	45.74	33.95	22.17	16.28	10.390	5.036	3.029	1.978
0.015	34.13	27.02	18.91	14.40	9.540	4.790	2.920	1.921
0.020	27.16	22.40	16.46	12.89	8.812	4.565	2.819	1.867
0.025	22.52	19.11	14.55	11.66	8.180	4.358	2.723	1.816
ν=0.2	$\phi_б$							
ϕ_m	0.005	0.01	0.02	0.03	0.05	0.1	0.15	0.2
0.003	98.70	60.12	33.29	22.72	13.542	6.193	3.648	2.357
0.005	78.80	52.00	30.56	21.38	13.022	6.062	3.593	2.328
0.010	52.27	38.80	25.34	18.61	11.874	5.755	3.461	2.260
0.015	39.00	30.88	21.61	16.45	10.903	5.474	3.337	2.195
0.020	31.04	25.61	18.81	14.73	10.070	5.217	3.220	2.133
0.025	25.74	21.83	16.63	13.32	9.348	4.980	3.110	2.073

Пользуясь этой таблицей 2, легко получить экспресс оценку коэффициента сжимаемости пустот трещинно-порового коллектора гранитов, для которых E=4.9·10^4 МПа и ν=0.3. При $\phi_{тр}$=0.005, $\phi_{бл}$=0.010 общая пустотность составляет 1.5%. Значение $\wp$=45.5. По формуле (44), для принятой модели двух систем вертикальных трещин получаем, что коэффициент сжимаемости пустот $\beta_{пуст}$=91/E=18.57·10^{-4} МПа$^{-1}$. С ростом пустотности матричных блоков коэффициент сжимаемости пустот снижается.

Приведем также оценку для изменения проницаемости трещин с изменением пластового давления. Как было отмечено выше, трещинная проницаемость меняется в 3 раза быстрее трещинной пустотности, и для оценки снижения проницаемости с падением пластового давления на величину Δp можно принять

$$\frac{k_{тр}}{k_{0,тр}} = 1 - 3\beta_{пуст,т}\Delta p \qquad (24.45)$$

причем $\beta_{пуст,т}$ определяем по формуле (24.43). Для трещинно-поровых коллекторов гранитов при $\phi_т$=0.005, $\phi_б$=0.010, E=4.9·10^{-4}МПа и ν=0.3 получаем $\beta_{пуст,т}$=0.00595 МПа$^{-1}$. Это значит, что при уменьшении пластового давления на 14 МПа, как это имело место к 2000 году для залежи фундамента Белого Тигра, трещинная доля проницаемости коллектора составит примерно 75% его первоначального значения. А для смыкания трещин и обращения в нуль трещинной доли проницаемости потребуется снижение пластового давления на 56 МПа при начальном значении 38 МПа, что невозможно.

Литература к лекции 24.

1. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. Москва, ГИТТЛ, 1953, 856 с.
2. *Писаренко Г.С., Яковлев А.Н., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев, Наукова думка, 1975, 704 с.
3. *Добрынин В.М.* Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. Москва, Недра, 1970, 239 с.
4. *Гиматудинов Ш.К.* Физика нефтяного и газового пласта. Москва, Недра, 1971, 309 с.
5. *Авчян Г.М., Матвеенко А.А., Стефанкевич З.Б.* Петрофизика осадочных пород в глубинных условиях. Москва, Недра, 1979, 224 с.
6. Проведение специальных и контрольных исследований керна и пластовых флюидов из фундамента месторождения Белый Тигр. Отчет по контракту LX-58/04/96, ВНИИнефть, рук. *Кузнецов А.М.*, Москва, 1996, 121 с.
7. *Голф-Рахт Т.Д.* Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. Москва, Недра, 1986 г.

Лекция 25

Метод материального баланса подсчета запасов мощной залежи.

Средняя сжимаемость пустот мощной залежи. Параметры пластовой нефти по глубине залежи. Плотность морской воды как функция температуры и давления. Метод материального баланса. Применение метода на стадии закачки.

Метод материального баланса дает надежные результаты для небольших месторождений замкнутого типа, имеющих хорошую проводимость. Суть метода в том, что вводятся усредненные параметры для всей залежи, такие как объём пустот, плотности и насыщенности фаз, пластовое давление. Оценка запасов нефти основана на зависимости падения пластового давления от отбора нефти.

Залежь фундамента Белого Тигра является большой по простиранию и мощности, здесь наряду с высоко проницаемыми зонами наличествуют и низко проницаемые области, и слои, делающие проблематичными применение метода и надежность получаемых результатов. Основным методом здесь является объёмный метод подсчёта запасов. ММБ может определить лишь те запасы, которые реагируют на отбор нефти введенными в эксплуатацию скважинами, т.е. вовлеченные в разработку запасы нефти. С увеличением числа скважин и освоением новых площадей, эти запасы могут вырасти. Ниже изложен общий подход к ММБ большой залежи, позволяющий пользоваться не только начальным участком снижения пластового давления, но и всей информацией, связанной с процессом разработки до момента начала разгазирования залежи.

Средняя сжимаемость пустот мощной залежи.

Сжимаемость пустотного пространства $\beta_{пуст}$ трещинно-порового коллектора изучалась в лабораториях НИПИморнефтегаз как экспериментально, так и теоретическим моделированием трещинной и поровой сжимаемости.

В соответствии с известными опытами [1] и существующими рекомендациями [2], сжимаемость пустотного пространства проще всего аппроксимировать в виде обратно пропорциональной зависимости от эффективного давления,

т.е. от разности между горным и пластовым давлением. Согласно данным лаборатории физики пласта, для коллектора залежи фундамента было принято

$$\beta_{пуст} = \frac{C}{p_г - p}, \quad C = 0.0961, \tag{25.1}$$

где $p_г$–горное давление, p–пластовое давление, в МПа. Значение постоянной C дано для залежи фундамента Белого Тигра.

Горное давление меняется с глубиной, его рост соответствует удельному весу вышележащих пород, среднее значение которого 2570 кг/м^3. При абсолютной глубине z и 50 метровом слое воды горное давление в МПа выразится формулой $p_г$=0.0257H -2.03. Если же за начало отсчёта взять кровлю фундамента и положить H=3050+z то для горного давления будем иметь $p_г$=76.4+0.0257z, где z–в метрах. Давление в нефтяной фазе на начало разработки на кровле составляло 37.7 МПа и росло вглубь согласно плотности пластовой нефти, p=37.7+0.0063z. Подставив эти перечисленные величины в (25.1), получаем зависимость сжимаемости пустот с глубиной (z-в метрах)

$$\beta_{пуст} = \frac{24.83 \cdot 10^{-4}}{1 + 5.013 \cdot 10^{-4} z} \tag{25.2}$$

Согласно полученной формуле (25.2) на начало разработки сжимаемость пустот на глубинах 3050, 3250, 3650, 3950 и 4550м составила (24.8; 22.5; 19.1; 17.1; 14.2)·10^{-4}МПа$^{-1}$. Среднее арифметическое по залежи её значение–18.2·10^{-4}МПа$^{-1}$. При согласовании истории разработки с принятыми запасами 513 млн. тонн пластовой нефти было найдено, что лучше подходит значение сжимаемости $\beta_{пуст}$=19·10^{-4}МПа$^{-1}$.

На дату 01.01.2001г пластовое давление снизилось ориентировочно на 13.7 МПа, по мощности залежи пластовое давление принимаем как в нефтяной фазе, p=24.0+0.0063z. Теперь вместо формулы (25.2) получим

$$\beta_{пуст} = \frac{18.34 \cdot 10^{-4}}{1 + 3.702 \cdot 10^{-4} z} \tag{25.3}$$

Согласно новой формуле (25.3) на тот же момент сжимаемость пустот на глубинах 3050, 3250, 3650, 3950 и 4550 м составят (18.34; 17.08; 15.01; 13.57; 11.79)·10^{-4}МПа$^{-1}$. Среднее арифметическое по мощности залежи значение–14.6·10^{-4}МПа$^{-1}$.

Были предприняты попытки замеров сжимаемости пустотного пространства гранитов. С этой целью образцы гранита были расколоты, прокладкой полос фольги толщиной 25 мкм были созданы искусственные прямолинейные трещины, точно определена проницаемость модели и проверена экспериментом. Далее модель подвергалась всестороннему обжиму, что соответствует увеличению горного давления. Для фиксированных значений давления всестороннего сжатия замерялась проницаемость. По проницаемости определялась пустотность и далее сжимаемость пустот. Обработка эксперимента показала возможность использования аппроксимации (25.1), но для постоянной было получено несколько большее значение C=0.1225. Несогласие константы C и её более высокое значения объяснимы мягкой фольговой прокладкой и интервалом изменения эффективного давления – до 350 МПа. Эксперимент показал, что формулой (25.1) можно пользоваться.

В ходе эксперимента было также установлено, что при увеличении давления обжима в первом цикле деформации носят частично упругий и частично пластический характер. Обычно полагают упругую составляющую сжимаемости пустот обратно пропорциональной эффективному давлению, т.е. разности между горным и пластовым давлением. Необратимую пластическую составляющую сжимаемости можно принимать постоянной, ее значения зависят от глубины залегания. Определить обе сжимаемости пустот можно по формулам

$$\beta_n = \beta_{упр} + \beta_{плч}, \beta_{упр} = \frac{C_y}{p_г - p}, \quad \beta_{плч} = \frac{1}{П_y} \qquad (25.4)$$

где значение постоянной C_y=692·10^{-4} МПа$^{-1}$ для гранитов, $p_г$-есть горное, p-пластовое давление в МПа, $П_y$-есть предел упругости породы. Ниже приведены некоторые данные по залежи фундамента месторождения Белый Тигр.

Таблица 25.1. Необратимая сжимаемость пустот по кернам.

Скв. ЦБ	Глубина, м	Предел Пу	10000/Пу	Пуассон, ν	10^4·$\beta_{упр}$	Рэф, МПа	10^4·$\beta_{пуст}$	10^4·$\beta_{плт}$
404	4558	1210	8.26	0.3	10.17	67.744	18.44	8.264
405	3381	1420	7.04	0.29	15.32	45.040	22.36	7.042
419	3910	2070	4.83	0.27	12.48	55.244	17.31	4.831
425	3167	840	11.90	0.33	16.87	40.912	28.77	11.905
445	4584	2000	5.00	0.24	10.10	68.246	15.10	5.000
446	4321	1710	5.85	0.27	10.91	63.173	16.76	5.848

446	3983	620	16.13	0.33	12.17	56.653	28.30	16.129
903	4463	2200	4.55	0.25	10.46	65.912	15.00	4.545
420	4109	1310	7.63	0.28	11.67	59.083	19.30	7.634
910	3735	660	15.15	0.32	13.30	51.869	28.45	15.152
Сред	4021	1359	7.36	0.288	12.34	57.386	19.70	7.358

Сосчитанное по 10 образцам кернов из скважин Центрального блока среднее значение необратимой деформации составила $7.36 \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ (по среднему значению предела упругости, равного 1359 МПа). С учетом снижения необратимой деформации с глубиной залежи ее значения на абсолютных отметках 3250, 3950, 4550 м можно принять равными $(11.2, 8.0, 6.2) \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ соответственно. На тех же глубинах горное давление составляет 81.5, 99.5, 114.9 МПа, пластовые давления на начало разработки залежи фундамента составляли 40, 43.7, 47.7 МПа, и расчет по (25.1) дает для упругих деформаций значения $(16.7,12.4,10.3) \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ соответственно. Если на начало процесса разработки общие значения сжимаемости пустот составляли $(27.9,20.4,16.5) \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$, то на момент 01.01.2001г, при снижении давления на 13.7 МПа, общая сжимаемость пустот составляет $(18.8,15.0, 12.7) \cdot 10^{-4}$ МПа$^{-1}$ соответственно. Сжимаемость пустотного пространства заметно варьирует как по высоте залежи, так и в ходе снижения пластового давления. Но зачастую приходится ограничиваться одним средним значением и достаточно грубой оценкой изменения объема пустот.

Найдем изменение объема пустот коллектора в случае выделения переменной и постоянной части сжимаемости пустот интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{dV}{Vdp} = \frac{C}{p_г - p} + \beta_{плч}, \quad V(p_0) = V_0 \tag{25.5}$$

что приводит к следующему результату

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{p_г - p_0}{p_г - p} \right)^C \exp(-\beta_{плч}(p_0 - p)) \tag{25.6}$$

Формула (25.6) может быть использована для оценки изменения объема пустот залежи в процессе ее эксплуатации. Слагаемые в (25.5) могут интерпретироваться как переменная (или упругая) и постоянная (или пластическая) составляющие сжимаемости пустот. При повышении пластового давления пластическую составляющую сжимаемости надо принимать равной нулю, так как эта деформация имеет односторонний

характер. Формулу (25.6) следует применять поэтапно, чередуя с $\beta_{плч}$=0.

Что касается более глубоких теоретических подходов к изучению зависимости порового объема при изменении горного и пластового давлений, то такие подходы предложены [1-4] и соответствующие результаты получили в научной литературе широкое обсуждение. Наиболее обоснованной в теоретическом плане представляется работа Г. Брандта [5] для гранулярных сред. Реальная пористая среда представляется в виде правильной укладки однородных шаров и для вычисления деформаций шаров используется известный подход Герца. Не вдаваясь в подробности выкладок, отметим, что Г. Брандт получил простую формулу для сжимаемости пустот, причем сжимаемость оказалась почти не зависящей от пористости. Зависимость от эффективного давления получилась обратно пропорциональной кубическому корню, зависимость от модуля упругости – обратно пропорциональной её степени с показателем 2/3

$$\beta_{пуст} = 6.53\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)^{2/3}(p_г - p)^{-1/3} \qquad (25.7)$$

Представляет интерес сравнить наши предыдущие результаты с теми, которые получатся по формуле Брандта. Для гранитов коэффициент Пуассона ν=0.3. Для модуля упругости гранитов нет однозначных данных, особенно зависимости её от температуры. Образцы дают значительный разброс. По данным лаборатории физики пласта НИПИморнефтегаз модуль упругости находится в пределах от 0.2 до 2×10^4МПа со средним значением 1.44×10^4МПа. Различие может быть объяснено множеством причин: содержанием примесей и разным петрологическим составом; механическими воздействиями при отборе керна, различием температурных условий. В таблице 25.2 даны значения сжимаемости пор для различных модулей упругости.

Таблица 25.2. Сжимаемость $\beta_{пуст}$ гранулярного коллектора по Брандту, в 10^{-4} МПа$^{-1}$.

$P_{эф}$,МПа	Модули упругости E материала горной породы, в 10^4МПа							
	0.5	**0.75**	**1**	**1.5**	**2**	**3**	**5**	7
10	97.34	74.28	61.32	46.80	38.63	29.48	20.97	16.76
15	85.03	64.89	53.57	40.88	33.75	25.75	18.32	14.64
20	77.26	58.96	48.67	37.14	30.66	23.40	16.65	13.30

25	71.72	54.73	45.18	34.48	28.46	21.72	15.45	12.35
30	67.49	51.51	42.52	32.45	26.78	20.44	14.54	11.62
35	64.11	48.93	40.39	30.82	25.44	19.42	13.81	11.04
40	61.32	46.80	38.63	29.48	24.34	18.57	13.21	10.56
45	58.96	44.99	37.14	28.34	23.40	17.86	12.70	10.15
50	56.93	43.44	35.86	27.37	22.59	17.24	12.26	9.80
55	55.15	42.08	34.74	26.51	21.88	16.70	11.88	9.49
60	53.57	40.88	33.75	25.75	21.26	16.22	11.54	9.22

Наиболее реальными для залежи фундамента являются значения эффективных давлений от 40 до 70 МПа и модуля упругости в пределах от 2 до $5 \cdot 10^4$МПа. Из таблицы видно, для этих значений формула Брандта дает от 23 до $11 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$. Это согласуется и с приведенными экспериментальными данными.

Параметры пластовой нефти по глубине залежи.

Пластовая нефть залежи фундамента Белого Тигра имеет разный компонентный состав в зависимости от интервала отбора проб нефти по глубине залежи и расположения скважины по площади залежи, т.е. количественный спектр компонентного состава нефти варьирует как по уровням абсолютных отметок массивного коллектора, так и по его площади. На верхних слоях залежи, вблизи его кровли, пластовая нефть содержит больше легких фракций, нежели на нижних слоях коллектора. С ростом глубины залегания в залежи пластовая нефть становится более вязкой и более тяжелой. В верхних слоях, где больше легких фракций, сжимаемость выше.

Отметим, что с увеличением глубины залегания меняется температура нефти и пластовое давление. Соответственно должны меняться вязкость и плотность как однозначно определяемые по давлению и температуре функции при фиксированном компонентном составе нефти. Но по глубине залежи фундамента меняется и спектр компонентного состава нефти, процентное его распределение по легким и тяжелым фракциям. На начало разработки было принято линейное изменение с глубиной залежи значений основных параметров пластовой нефти. Глубина z отсчитывалась от кровли залежи вертикально вниз в метрах.

Газосодержание (стм^3 /тонн) Γ=211.3-0.03864z;

Давление насыщения (МПа) $P_{нас}$=24.43-0.003378z;

Плотность пластовой нефти (кг/м^3) $\rho_{пл.н}$=641.7+0.008811z;

Объемный фактор пластовой нефти $B_{пл.н}=1.57-0.7146\cdot10^{-4}z$;
Вязкость пластовой нефти (мПа·с) $\mu_{пл.н}=0.425+0.178\cdot10^{-4}z$;
Сжимаемость пластовой нефти (МПа$^{-1}$) $\beta_{пл.н}=0.00273-0.42\cdot10^{-6}z$;

С глубиной температура возрастает, геотермальный градиент в среднем составляет 2.3℃ на 100 м. Давление насыщения убывает. Содержание газа также убывает с глубиной от 211 у кровли и до 151 стм^3/т к подошве залежи. Нефть залежи фундамента относится к легкой категории, плотность ее в пластовых условиях росла с глубиной от 642 до 655 кг/м^3.

Таблица 25.3. Плотность пластовой нефти (кг/м^3) как функция давления для некоторых значений температур и газосодержания.

Р, МПа	Г=160 стм^3/т			Г=180 стм^3/т			Г=200 стм^3/т		
	Т=130^o	*Т=145^o*	*Т=160^o*	*Т=130^o*	*Т=145^o*	*Т=160^o*	*Т=130^o*	*Т=145^o*	*Т=160^o*
10.0	667.1	659.4	653.5	667.1	659.4	653.5	667.1	659.4	653.5
14.0	652.4	644.0	634.5	652.4	644.0	634.5	652.4	644.0	634.5
16.0	644.6	635.2	624.2	644.6	635.2	624.2	644.6	635.2	624.2
18.0	636.5	626.0	613.6	636.5	626.0	613.6	636.5	626.0	613.6
20.0	637.3	622.2	607.3	628.2	616.2	602.7	628.2	616.2	602.7
21.0	639.4	624.2	609.3	624.3	611.2	597.1	624.0	611.2	597.1
21.5	640.5	625.2	610.3	625.4	608.7	594.3	621.9	608.7	594.3
22.0	641.6	626.1	611.3	626.4	608.0	591.5	619.8	606.1	591.5
22.5	642.6	627.1	612.2	627.5	609.0	592.1	617.6	603.5	588.7
23.0	6436.0	628.0	613.2	628.5	609.9	593.1	615.5	600.9	585.9
24.0	645.6	629.8	615.0	630.5	611.8	595.0	615.6	595.6	580.2
25.0	647.5	631.6	616.9	632.5	613.7	596.8	617.5	595.2	576.3
27.0	651.3	635.0	620.4	636.3	617.2	600.4	621.4	598.9	579.9
30.0	656.6	639.8	625.4	641.7	622.3	605.6	626.8	604.4	585.1
35.0	664.3	647.3	633.0	649.6	630.2	613.4	634.9	612.8	592.9
40.0	671.2	653.6	639.9	656.7	637.0	620.6	642.2	620.3	600.1
50.0	682.0	664.6	651.4	668.0	649.0	632.7	653.8	633.7	612.3

Таблица 25.4.

Результаты лабораторного определения сжимаемости проб пластовой нефти по некоторым скважинам залежи фундамента.

Скв №№	Глубина, м, абс	Ро, атм	Ротб, атм	Рнас, атм	Т, °С	Г, нм^3/т	$\beta_{н.ср}$, 10^{-5}атм$^{-1}$
422	3218-3480	398	255	197	132	159	20,1
408	2840-3100	381	249	241	127	195	24,5
2	3193-3255	390	254	227	130	189	22,4
920	3497-3611	417	268	207	136	166	22,6
17	3750-3907	429	336	220	142	185	23,7

Как можно заметить по таблице, лабораторные определения со временем дают заметно меньшие значения сжимаемости, чем ожидаемые по обобщениям за предыдущие годы. Это можно объяснить тем, что из фундамента добыто уже около 20% геологических запасов (к 2000 году), что составляет половину от извлекаемых запасов. Закачиваемая вода занимает преимущественно нижние слои, причем более тяжелая и менее сжимаемая нефть переместилась в зону отбора.

По таблице 25.3 можно вычислить сжимаемость нефти для различных давлений, температур и содержания растворённого газа. Однако разный компонентный состав нефти на разных глубинах вносит свои коррективы. С учетом этого фактора и отобранных с разных глубин проб нефти были определены плотности и объемные коэффициенты для трех характерных глубин залегания и соответствующие им аппроксимации выше давления насыщения. По аппроксимациям вычислены значения сжимаемостb пластовой нефти согласно определению.

В таблице 25.4 даны значения плотностей и коэффициентов сжимаемости некоторых проб пластовой нефти. Из таблицы видно, что на начало разработки сжимаемость пластовой нефти составляло примерно $\beta_{пл.н}= (20\div22)\cdot10^{-4}$ МПа$^{-1}$.

Плотность морской воды как функция температуры и давления

Анализы воды Южно-Китайского моря, закачиваемой в залежь фундамента месторождения Белый Тигр, проводились Институтом микробиологии РАН (акад. Иванов М.В.). Вода содержит в растворённом виде около 34 г/л солей. Состав содержание солей следующий: хлор 18.5 г/л; натрий 10.8 г/л; сульфата SO_4 порядка 2.5 г/л; магния 1.2 г/л. В поверхностных условиях плотность морской воды составляет 1.023 т/м^3, но после закачки в пласт, в связи с ростом температуры, плотность снижается, а с ростом давления плотность растёт.

Вода закачивается в залежь фундамента ниже отметки 4000м. Здесь температура около 150°С и выше, а пластовое давление на текущий момент около 32 МПа и выше. В области температур 130°С<T<160 °С и давлений 25<p<35 МПа

плотность морской воды можно брать по линейному приближению

$$\rho_в = 0.9585 + 4.8\cdot10^{-4}\Delta p - 0.783\cdot10^{-3}\Delta T$$
$$= 0.9585(1 + 5.01\cdot10^{-4}\Delta p - 8.17\cdot10^{-4}\Delta T) \quad (25.8)$$
$$\Delta p = p - p_*, \quad \Delta T = T - T_*, \quad p_* = 30\ МПа, \quad T_* = 145^o C$$

В качестве опорных значений температуры и давления приняты 145°С и 30 МПа. Сжимаемость воды в пластовых условиях на глубине закачки составляет примерно $\beta_{вр}$ =5.01·10^{-4} МПа$^{-1}$, температурный коэффициент расширения $\beta_{вТ}$ =8.17·10^{-4} °С$^{-1}$. То есть, уменьшение плотности воды с увеличением температуры на 1°С чуточку превосходят ее увеличение с ростом давления на 1 МПа.

Метод материального баланса.

Оценка запасов нефти основана на зависимости падения пластового давления от отбора запасов нефти из залежи [7-9]. Как правило, метод применяют на начальном упругом режиме разработки месторождения, когда геологическая информации о строении залежи недостаточна для уверенного применения объемного метода подсчета запасов. Метод применим и для режима поддержания пластового давления вытеснением нефти морской водой.

Рассмотрим сначала ММБ для наиболее простого случая, начального периода разработки замкнутой нефтяной залежи, не имеющей газовой шапки, когда добываемая продукция не содержит пластовой воды, но ведется закачка воды и режим является чисто упругим. До начала разгазирования условия сохранения масс пластовой воды и пластовой нефти замкнутой залежи можно написать в виде

$$\rho_в s V_п = \rho_{в0} s_0 V_{п0}, \quad \rho_н (1-s) V_п = \rho_{н0}(1-s_0)V_{п0} - M_{нг}, \quad (25.8)$$

где средние текущие на данный момент времени по залежи и их начальные значения соответственно: $V_п$ *и* $V_{по}$–объемы пустот; s и s_o-водонасыщенности; $\rho_в$ и $\rho_{во}$ - плотности пластовой воды; $\rho_н$ и $\rho_{но}$ - плотности пластовой нефти (вместе с растворенным в ней газом); $M_{нг}$ –общая добытая масса нефти и газа.

Обозначим запасы пластовой нефти в тоннах $Z_o=\rho_{но}(1-s_o)V_{по.}$ Запасы товарной нефти $Z_н$ и газа $Z_г$ в сумме образуют запасы пластовой нефти, $Z_o=Z_н + Z_г$. Газфактор определяет содержание

газа в нормальных кубометрах на тонну сепарированной нефти, $Z_г=\rho_{го}Г\ Z_н$, так что $Z_о= Z_н(1+\rho_{го}Г\ )$. Это означает, что запасы пластовой нефти отличаются от запасов сепарированной нефти постоянным множителем. Для условий залежи фундамента $\rho_{го}$=1.023 кг/м^3, $Г$=180 м^3/т. Связь эта имеет вид $Z_о$= 1.184$Z_н$.

В равенствах (25.8) объем пустот и средние плотности фаз можно считать функциями осредненного значения пластового давления. Лабораторным путем в НИПИморнефтегаз определены зависимости от давления плотности пластовой нефти и плотности закачиваемой морской воды для различных фиксированных температур. Естественно взять и усредненные плотности фаз такими же функциями от усредненного пластового давления, причем усреднение уместно вводить таким образом, чтобы оно вносило наименьшую погрешность.

Введем сжимаемости пластовой нефти, пластовой воды и в целом для пустотного пространства залежи при снижении пластового давления в виде

$$\beta_н = \frac{1}{\rho_н}\frac{d\rho_н}{dp}, \quad \beta_в = \frac{1}{\rho_в}\frac{d\rho_в}{dp}, \quad \beta_п = \frac{1}{V_п}\frac{dV_п}{dp} \qquad (25.9)$$

Сжимаемости не есть постоянные величины, они также зависят от давления и температуры. Но в относительно небольшом интервале изменения давлений и температур их можно принять неизменными.

Из (25.8), дифференцируя по пластовому давлению и деля на произведения слева, получаем следующие два уравнения

$$\frac{ds}{s}+\frac{dV_п}{V_п}+\frac{d\rho_в}{\rho_в}=0, \quad -\frac{ds}{1-s}+\frac{dV_п}{V_п}+\frac{d\rho_н}{\rho_н}=-\frac{dM_{нг}}{(1-s)\rho_н V_п} \qquad (25.10)$$

Используем введенные обозначения и введем новые

$$\beta_s = \frac{1}{s}\frac{ds}{dp}, \quad Z_0=(1-s_0)\rho_{н0}V_п, \quad Z=(1-s)\rho_н V_п \qquad (25.11)$$

В новых обозначениях уравнения (25.10) запишутся в виде

$$\beta_s+\beta_п+\beta_в=0, \quad -\frac{s}{1-s}\beta_s+\beta_п+\beta_в=\frac{1}{Z}\cdot\frac{dM_{нг}}{dp} \qquad (25.12)$$

Исключим из этих уравнений β_s. Тогда для определения текущих запасов пластовой нефти (вместе с растворенным в нефти газом), вовлеченных на данный момент в разработку, получаем основную формулу

$$Z = \frac{1}{\beta_*}\frac{dM_{нг}}{dp}, \quad \beta_* = \beta_н + \frac{1}{1-s}\beta_п + \frac{s}{1-s}\beta_в \qquad (25.13)$$

где β_* есть сжимаемость пластовой системы в целом, s – текущее значение средней водонасыщенности залежи в целом. Сжимаемости нефти, воды и пустот зависят от пластового давления, тогда как сжимаемость пластовой системы в целом зависит еще от водонасыщенности.

Когда эксплуатация замкнутой залежи происходит в упругом режиме без нагнетания и добычи воды, как это было для залежи фундамента Белого Тигра, водонасыщенность меняется за счет расширения воды незначительно и этим изменением можно пренебречь. Для малых снижений пластового давления также можно пренебречь изменением сжимаемостей фаз и пустот со снижением пластового давления. Тогда сжимаемость β_* для пластовой системы в целом можно принять постоянной. Согласно формуле (25.6) текущие запасы пластовой нефти будут обратно пропорциональными наклону кривой зависимости среднего пластового давления от отбора её массы.

Добытая за небольшой отрезок времени масса пластовой нефти содержит товарную нефть и газ. Масса нефти и газа $dM_{нг}$ может быть представлена в виде произведения $(1+\rho_{го}\Gamma)$ на добытую массу товарной нефти $dM_н$, т.е. $dM_{нг} = (1+\rho_{го}\Gamma)\ dM_н$. Газосодержание добываемой продукции Γ постоянно при пластовых давлениях выше давления насыщения. Множитель $(1+\rho_{го}\Gamma)$ можно сократить в обеих частях равенства (25.13) и представить оценку текущих запасов товарной нефти $Z_н$ в залежи в таком же виде

$$Z_н = \frac{1}{\beta_*}\frac{dM_н}{dp}, \qquad (25.14)$$

Полученная формула является основной. Однако для ее использования нужно знать зависимость водонасыщенности от снижения давления. При отсутствии закачки воды и ее добычи, водонасыщенность s со снижением пластового давления меняется незначительно, и это изменение можно найти по первому из соотношений (25.8), применяя линейное приближение

$$s = s_0 \frac{\rho_{в0} V_{п0}}{\rho_в V_п} \approx \frac{s_0}{(1+\beta_в \Delta p)(1+\beta_п \Delta p)} \approx s_0 \left[1 - (\beta_в + \beta_п)\Delta p\right] \quad (25.15)$$

т.е. водонасыщенность растет как за счет расширения воды, так и за счет уменьшения общего объема пустот.

Для определения начальных запасов товарной нефти в замкнутой залежи перейдем в формуле (25.14) к этапу разработки залежи, когда можно достаточно надежно оценить производную $dp/dM_н$ как отношение разностей $\Delta p/\Delta M_н$. Водонасыщенность принимаем равной её начальному значению s_0 и формулу представим в виде

$$Z_{н0} = \frac{1}{\beta_{*0}} \frac{\Delta M_н}{\Delta p}, \quad \beta_{*0} = \beta_{н0} + \frac{1}{1-s_0} \beta_{п0} + \frac{s_0}{1-s_0} \beta_{в0} \quad (25.16)$$

Здесь производная заменена отношением разностей, а водонасыщенность принята равной первоначальному ее значению. Сжимаемости нефти, воды и пустот также берутся для начального этапа, при начальном пластовом давлении. В начальный период эксплуатации залежи зависимость среднего пластового давления от отбора нефти носит линейный характер и отношение снижения давления к добытой массе нефти $\Delta p/\Delta M_н$ сохраняет примерно одно и то же значение. Для залежи фундамента Белого Тигра в начальный период на 1 млн. т. добычи нефти приходится около 0.7 МПа снижения среднего пластового давления. Отношение $\Delta M_н/\Delta p$=1.43 млн.т./МПа с небольшими колебаниями в обе стороны. Для оценки запасов надо определить осредненное значение сжимаемости пластовой системы β_* в начальный период эксплуатации. Сжимаемость пластовой нефти со снижением пластового давления растёт от $20 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$ при начальном пластовом давлении до $27 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$ при давлении насыщения. Согласно аппроксимациям свойств нефти сжимаемости при начальном пластовом давлении для уровней 3250, 3950 и 4550 м составляют (21.9; 19.7; 15.0)$\cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$, тогда как вблизи давления насыщения сжимаемости растут до (31.3; 29.97; 29.1)$\cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$. В качестве компромиссного значения для начального периода разработки естественно принять $\beta_н = 20 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$, что соответствует начальному значению сжимаемости на уровне 3650 м.

Коэффициент сжимаемости воды также увеличивается со снижением давления. Его среднее значения на глубинах

нагнетания воды составляет $5.4 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$, а начальное значение – около $5 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$. Из-за малой погребенной воды залежи фундамента вклад сжимаемости воды составляет менее 3%.

В таблице 25.5 приведены расчётные по (25.16) значения сжимаемости β_* для залежи фундамента на начало разработки и подсчитанные вовлечённые запасы для разных значений связанной воды. Расчёты производились при значениях $\beta_в = 5 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$ и $\beta_н = 20 \cdot 10^{-4}$МПа$^{-1}$ и для некоторых наиболее вероятных значений $\beta_п$ после начала добычи до организации нагнетания воды.

Таблица 25.5. Сжимаемость пластовой системы и оценка вовлечённых в разработку запасов.

Сжимаемость пор	*Сжимаемость в целом,* β_*, 10^{-4} МПа$^{-1}$			*Вовлечённые запасы, млн. тонн*		
$\beta_п$, 10^{-4}МПа$^{-1}$	s_0=10%	s_0=15%	s_0=20%	s_0=10%	s_0=15%	s_0=20%
20	42.78	44.41	46.25	334.3	322.0	309.2
19	41.76	43.24	45.00	342.4	330.7	317.8
18	40.56	42.06	43.75	352.6	340.0	326.8
17	39.44	40.88	42.50	362.6	349.8	336.5

Наиболее приемлемыми (при $\beta_п$=18-19) для связанной водонасыщенности 15% на начало разработки были запасы около 330-340 млн. тонн. Однако это не значит, что запасы нефти ограничены этой цифрой. Залежь фундамента является большой, определение среднего пластового давления здесь проблематично. На отдаленных участках залежи пластовое давление не успевает среагировать на добычу нефти. Измеренные пластовые давления по скважинам могут оказаться ниже среднего пластового давления по залежи. Запасы, подсчитанные по формуле (25.16), могут быть заниженными из-за больших размеров и расчленённости залежи фундамента тектоническими нарушениями, как по простиранию, так и по мощности.

С увеличением разбуренной площади вовлекаются в разработку всё новые, ранее защемлённые участки и блоки, которые были изолированы от работающих скважин литологическими сдвигами. Поэтому имеет смысл обобщить метод материального баланса на больший период времени, не ограничиваясь только начальным этапом, с учетом зависимости сжимаемостей флюидов и объема пустот от пластового давления.

Применение метода материального баланса на стадии закачки

Соотношения (25.8) можно непосредственно использовать для определения основных характеристик месторождения, используя всю стадию упругого режима разработки. Дело в том, что введение сжимаемости пустот и сжимаемости фаз удобно для приближенных методов расчета, связанных с линеаризацией нелинейных зависимостей. Если же становится необходимым введение нелинейных зависимостей коэффициентов сжимаемости от пластового давления, то проще не привлекать понятия сжимаемости, а пользоваться исходными нелинейными зависимостями плотностей фаз и объема пустот от пластового давления. Такой подход становится более ясным, опирающимся на основные, хорошо известные и лабораторно определяемые физические зависимости. Расчетные формулы будут не столь простыми, как (25.6-25.9), но они достаточно легко реализуемы при современных компьютерных возможностях.

Для стадии упругого периода эксплуатации залежи при снижении давления вплоть до начала её разгазирования плотности фаз и объём пустот в среднем можно считать зависящими от среднего пластового давления. Подставим в (25.8) вместо объёма пустот $V_п$, плотности воды $\rho_в$ и плотности пластовой нефти $\rho_н$ их выражения через среднее пластовое давление. Предварительно вводим безразмерные величины (которые выделяем жирным шрифтом), отнеся их величины к значениям при среднем пластовом давлении p_o

$$\boldsymbol{\rho_в} = \frac{\rho_в(p)}{\rho_в(p_o)}, \quad \boldsymbol{\rho_н} = \frac{\rho_н(p)}{\rho_н(p_o)}, \quad \boldsymbol{V_п} = \frac{V_п(p)}{V_п(p_o)}, \qquad (25.17)$$

Получаем уравнения, связывающие закачку воды и добычу продукции с текущей средней водонасыщенностью залежи s и начальными значениями: пустотностью $V_{по}$; плотности пластовой нефти $\rho_{но}$; плотности пластовой воды $\rho_{во}$

$$s\boldsymbol{\rho_в V_п} = s_o, \quad M_{нг} = \rho_{но}V_{по}[(1-s_o)-(1-s)\boldsymbol{\rho_н V_п}], \quad Z_0 = (1-s_o)\rho_{но}V_{по} \qquad (25.18)$$

Первое из уравнений здесь служит для определения значения водонасыщенности при известном среднем пластовом давлении, по второму уравнению можно найти начальные, вовлеченные в разработку, запасы пластовой нефти (товарной нефти и газа). Термин «вовлеченные» придуман для того,

чтобы отличить их от геологических запасов, которые должны быть больше «вовлеченных», охваченных воздействием пластового давления. Из (25.18) имеем

$$s=\frac{s_0}{\boldsymbol{\rho_в V_п}},\quad Z_0=\frac{M_{нг}}{1-\dfrac{1-s}{1-s_0}\boldsymbol{\rho_н V_п}}\quad \textit{или}\quad Z_0=\frac{M_{нг}(1-s_0)}{(1-\boldsymbol{\rho_н V_п})-s_0(1-\boldsymbol{\rho_н}/\boldsymbol{\rho_в})} \qquad (25.19)$$

Последняя формула дает возможность многократной оценки начальных запасов пластовой нефти замкнутой залежи. Вовлеченные в разработку начальные запасы для разных моментов времени будут получаться разными. По тенденции их изменения можно судить о вовлечении новых площадей в разработку или искажении физических зависимостей, либо некорректном определении средних по залежи значений давлений.

Преобразуем (25.19), сократив на общий множитель $(1+\rho_{го}\Gamma)$ и выделив заранее табулируемую для данной залежи часть

$$Z_{н0}=\frac{(1-s_0)}{(1-\boldsymbol{\rho_н V_п})-s_0(1-\boldsymbol{\rho_н}/\boldsymbol{\rho_в})}M_н=\psi(p,s_0)M_н \qquad (25.20)$$

Формула (25.20) является основной. Она позволяет по зависимости от среднего пластового давления средних по залежи значений плотности нефти, плотности воды и объема пустотного пространства найти начальные запасы нефти, вовлеченные в разработку на текущий момент отбора нефти. Падение пластового давления p, соответствующее отобранной массе товарной нефти $M_н$, как правило, тщательно определяется и документируется. Оценку запасов нефти $Z_{но}$ удобно проводить на моменты времени с достаточно большим числом замеров пластовых давлений по скважинам, чтобы возможно точнее определить связь отбора нефти $M_н$ с падением пластового давления. При этом желательно табулировать функцию $\psi(p,s_o)$ для нескольких наиболее вероятных значений s_o. В таблице 25.6 даны аппроксимации плотности по лабораторным данным для 4-х уровней.

Таблица 25.6. Аппроксимации плотности (в кг/м³) от давления (в МПа) для различных глубин залегания.

Глубина	плотность воды, кг/м³	плотность нефти, кг/м³
H=3250м	948.57+0.9987p-0.0094p^2	552.8+2.9935p-0.0206 p^2
H=3650м	940.29+1.0932p-0.0107p^2	556.8+2.9081p-0.0201 p^2
H=3950м	934.09+1.1641p-0.0116p^2	559.7+2.8514p-0.0198 p^2

H=4550м	919.43+1.2768p-0.0122p^2	572.2+2.75p-0.0206 p^2

В вариантах расчётов был определен основной уровень отбора на отметке 3650 м и пластовые давления брались приведенные к этой отметке. Для воды, которая закачивается ниже 4000 м, были приняты два варианта вычислений её свойств - по значениям пластовых давлений на глубине 3950 м и по их значениям на глубине 3650м. Принятые параметры: s_o=0.15; $\beta_{плч}$=0.000736 МПа$^{-1}$; $\beta_{упр}$=0.0692/($p_г$-p); свойства фаз – на глубине 3650м; с переменной по давлению упругой сжимаемостью при константе C=0.0961. Результаты в табл.25.7.

Таблица 25.7. Запасы нефти (в млн. тонн), рассчитанные ММБ для Центрального и северного блоков залежи фундамента.

Сжимаемость пустот, МПа$^{-1}$	Связанная вода, s_o	Плотность и сжимаемость: вода-3950 м, нефть-3650 м.		Плотность и сжимаемость: вода-3650 м, нефть-3650 м.	
		центр	север	центр	север
$\beta_{плч}$=0.000736 C=0.0692	0.05	464.3	53.9	467.6	54.0
	0.10	450.9	52.4	454.1	52.4
	0.15	436.7	50.8	439.9	50.8
	0.20	421.8	49.1	424.9	49.1

На рис. 25.1 показано увеличение запасов в процессе введённых в работу скважин. Из сравнения видно, что первоначально определённые запасы являются заниженными. С введением в эксплуатацию новых скважин вовлекаются в разработку новые, ранее «запечатанные», участки залежи и естественно, что запасы растут.

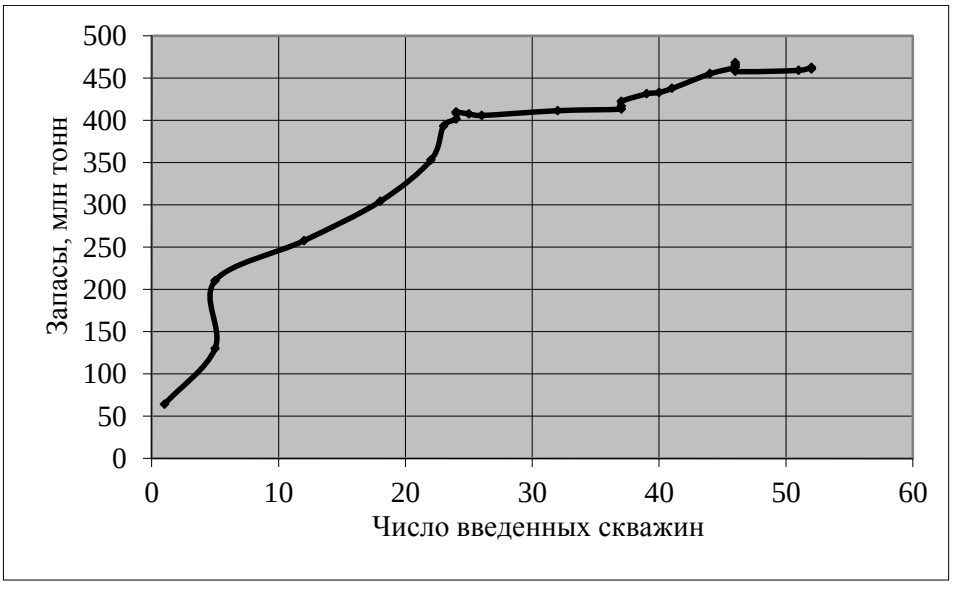


Рис.25.1. Рост расчётных запасов ЦБ фундамента с вводом в добычу новых скважин.

Основной вывод состоит в том, что по скромным оценкам запасы нефти Центрального блока фундамента сосредоточены в пределах от 420 до 450 млн тонн. Запасы нефти Северного блока составляют от 40 до 50 млн. тонн. Общие запасы нефти залежи фундамента по ММБ оцениваются в 460-500 млн. тонн.

Литература к лекции 25.

1. Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Проектирование разработки. *Ш.К. Гиматудинов, Ю.П. Борисов, М.Д. Розенберг и др*. М.: Недра, 1983. 463с.
2. *Майдебор В.Н*. Разработка нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М., Недра, 1971.
3. *Добрынин В.М*. Деформация и изменение физических свойств коллекторов нефти и газа. М.: Недра, 1970.
4. *Голф-Рахт Т.Д*. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. - М., Недра, 1986 г.
5. *Brandt, H. A*. Study of Speed of Sound in Porous Granular Media. J. off Applied Mechanics, vol. 22, №1,1955.
6. *Писаренко Г.С., Яковлев А.Н., Матвеев В.В*. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Науково думка. 1975. 704с.
7. *Shilthuis, R.J*. Active Oil and Reservoir Energy. Trans., AIME, 1936, 118: 33-52.
8. *Havlena, D and Odeh, A.S*. The Material Balance as an Equation of a Straight Line. Part 1, Trans., AIME, 1963, 228: 896-900.
9. *Havlena, D and Odeh, A.S*. The Material Balance as an Equation of a Straight Line. Part 2, Trans., AIME, 1964, 231: 815-822.

Лекция 26.

О моделировании температурных режимов скважины и пласта.

Общее описание проблем. Прогревание воды по стволу нагнетательной скважины. Промысловые замеры температуры закачиваемой воды на забое. Температурный режим пласта. Потери тепла по стволу добывающей скважины. Задачи термического режима скважины.

Добыча термальной воды, как и других природных флюидов, сопровождается заметным изменением температуры добываемого флюида, как по пласту, так и по скважине. Учёт температурного фактора влияет как на показатели разработки, так и на характеристики пласта и флюидов в процессе добычи.

В этой лекции отметим проблемы, которые ещё недостаточно изучены в научной литературе.

Ранее были изложены законы фильтрации в изотермических условиях. Они подтверждены многочисленными экспериментами. В неизотермических условиях законы фильтрации обычно пишут те же, но с учётом изменения плотности и вязкости жидкости от температуры, добавив ещё уравнение для определения температуры. Обоснование и обобщение законов фильтрации в широком интервале изменения, особенно для высоких температур, остаётся мало изученной проблемой.

Довольно много работ посвящено температурному режиму работающей скважины, есть достаточное число замеренных промысловых данных по значениям температуры вдоль ствола скважины [1-8]. Для различных условий эксплуатации получено хорошее совпадение расчётов и замеренных данных [8]. Проблемой продолжает оставаться расчет профилей температур в случае фазового перехода в скважине, такие разработки известны лишь для сопел ракет и парогенераторов. При добыче термальной перегретой воды с температурой выше 200°С определение отметки перехода воды из жидкого в парообразное состояние и влияние фаз на температурный режим по стволу скважины рост парообразования остаётся недостаточно исследованным, здесь нет общепризнанных результатов. Учёт фазового перехода существенно отражается на профиле температуры и её снижении. В случае нефтяных скважин, когда давление с подъёмом вверх снижается ниже давления насыщения, из нефти выделяется газ и расширение газа сказывается на температурном профиле. Учёт постепенного выделения газа из нефти по колонне скважины, его влияния на температурный профиль и тепловые потери в горные породы остается всё ещё актуальной задачей.

Общее описание проблем.

Разработка месторождения нефти или термальных вод с целью извлечения растворенных в воде ценных компонент имеет три этапа: упругий, естественно-водонапорный и циркуляционный.

Упругий режим предполагает работу только добывающих скважин за счет упругой пластовой энергии и высокого

пластового давления. Отобранные объёмы воды компенсируются снижением плотности термальной воды, сопровождаемой снижением пластового давления, причём объёмной деформации подвержена и горная порода. Для количественного описания добычных возможностей в упругом режиме полезны понятия сжимаемости флюидов и сжимаемости горной породы. В нефтяной научно-технической литературе упругий режим достаточно хорошо изучен. Однако добычные возможности для нефтяных месторождений, где флюид хорошо сжимаем благодаря наличию растворённого газа, оказались небольшими. В упругом режиме истощения залежи нефти можно добыть всего 14-19% запасов пластовой нефти. Для термального месторождения упругий запас ещё меньше из-за меньшей сжимаемости воды по сравнению с нефтью. В упругом режиме можно извлечь около 6-8% пластовой воды. Соответственно ценных компонент также порядка 6-8% от всех их запасов.

Водонапорный режим естественного дренирования предполагает замещение освободившегося объёма нефти законтурными водами или водами других горизонтов, рек и морей. Когда залежь не является изолированной, когда воды данной залежи подпираются водами вышележащих горизонтов, освободившиеся в результате добычи термальной воды объёмы компенсируются частично за счет вторжения вод других горизонтов. Следить нужно за изменением пластового давления. Если оно сохраняется, значит, воды, вторгшиеся из других горизонтов, полностью компенсировали отборы. Таково Махачкалинское месторождение термальных вод, где за 40 лет добычи нет сколь-нибудь заметного снижения пластового давления. Если же давление в пласте снижается, то компенсация идет частичная. В режиме естественного дренирования можно извлечь значительно большее количество вод, нежели в упругом режиме. Все зависит от того, каков режим дренирования и как велика законтурная зона.

Для замкнутых залежей с аномально высокими давлениями, когда связь с другими законтурными водами не имеется или затруднена, приток вод из других залежей не компенсируют отборы. И в режиме дренирования отборы также не компенсируются, если темпы разработки достаточно высоки. В таких случаях месторождение сначала разрабатывают на

упругом режиме, пока можно удержать установленные проектом темпы разработки, а затем переходят на режим нагнетания воды с её естественной температурой через сеть нагнетательных скважин. Такой способ обеспечивает поддержание пластового давления, достаточного для фонтанирования добывающих скважин и получения горячей воды или рассолов. При строительстве геотермальных электростанций не обойтись без закачки отработанных термальных вод обратно в пласты, так как нужно поддерживать достаточно высокие темпы отборов термальной воды, а отработанную воду направить обратно на поддержание пластового давления. Эта отработанная вода, охладившаяся в результате снятия тепла, при обратной закачке по стволу нагнетательной скважины прогревается от контакта с окружающими горными породами и на забое будет иметь температуру до 40°С и выше. Далее она же, фильтруясь по пласту, прогревается от горячего скелета пласта. Вокруг забоя скважины образуется охлаждённая зона, которая становится всё больше с течением времени. Динамика роста охлаждённой призабойной зоны и определит долговечность работы и энергетические возможности пласта.

В этой связи необходимо ещё уметь решать задачи прогревания закачиваемой воды по стволу скважины, динамики охлаждения призабойной зоны вокруг нагнетательной скважины, притока тепла в разрабатываемую залежь с кровли и подошвы, динамики температурного поля коллектора и горных пород, остывания горячей воды при её подъёме по стволу добывающей скважины. На решение всех этих задач влияет большое число геологических факторов и теплофизических параметров, из которых удаётся учесть лишь самые существенные, ограничившись моделями типичных ситуаций. Исключительно в целях простоты изложения мы выбрали одномерные линейные постановки задач, использовали разные порядки масштабов вдоль и поперек скважины, по простиранию и поперек пласта.

Прогревание воды по стволу нагнетательной скважины

Обычно принимаемые предположения следующие: 1) вводится одна общая средняя по сечению температура для воды

и металлической части обсадной колонны, зависящая от глубины расположения поперечного сечения ствола и времени; 2) теплопроводность горной породы учитывается лишь в одном, поперечным стволу направлении и переносом тепла в горной породе в направлении ствола скважины пренебрегается; 3) трехмерная задача извлечения тепла нагнетаемой водой из горной породы заменяется набором плоских осесимметричных задач осреднением теплофизических параметров горной породы во всём поперечном сечении; 4) для потока тепла из горной породы к скважине принимается известное в литературе асимптотическое приближение точного решения. Оно годно для относительно больших времён и содержит логарифм отношения радиуса распространения теплового возмущения к внешнему радиусу металлической колонны.

Направим ось Oz вертикально вниз по оси скважины, обозначим удельные объёмные теплоёмкости воды и металла через $c_в$ и $c_м$, приемистость скважины через $Q_в$, значения температур на устье скважины для воды T_y, на нейтральном слое T_o, температуру горной породы вдали от скважины $T_г$, геотермальный градиент γ, внутренний радиус скважины через r, толщину металлической трубы δ, температуру воды в скважине через $T(z,t)$. Одна из возможных постановок задачи выглядит следующим образом

$$c_* \frac{\partial T}{\partial t} + c_в Q_в \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha\left(T - T_г\right)$$
$$c_* = \pi r^2 \cdot c_в + 2\pi r \delta \cdot c_м; \quad T_г = T_0 + \gamma z \qquad (26.1)$$
$$T(0,t) = T_y; \quad T(z,0) = T_г; \quad \alpha = \frac{2\pi\lambda}{\ln\left(R(t)/r\right)}$$

Параметр α здесь характеризует интенсивность обмена теплом между горной породой и скважиной. Положение фронта распространения возмущений температуры $R(t)$ растёт пропорционально корню квадратному из времени. Для «средних» условий горных пород за сутки фронт $R(t)$ углубляется примерно на полметра, за месяц около 3 м, за год ориентировочно на 5 метров. Из-за малой изменяемости параметра α его значение считают неизменным при решении задачи (26.1).

Решение задачи (26.1) не представляет трудностей, так как уравнение первого порядка и оно линейное. Наиболее подходящий метод – метод характеристик с представлением

T(z,t) в виде бегущей волны или применение преобразования Лапласа. Мы выпишем только одно значение температурного профиля на забое скважины при *z=H* для больших времен, когда профиль температуры вдоль скважины почти перестает меняться, т.е. выходит на квазистационарное решение. Значение температуры воды при входе в пласт можно представить в удобном для расчетов безразмерном виде

$$\frac{T_{пл}-T_{вх}}{T_{пл}-T_0}=\frac{T_0-T_y}{T_{пл}-T_0}\cdot e^{-\xi}+\frac{1-e^{-\xi}}{\xi},\quad \xi=\frac{\alpha H}{c_в Q_в}. \qquad (26.2)$$

Эта формула дает простую экспоненциальную зависимость от одного основного параметра и позволяет дать быструю оценку температуры воды на забое. Для больших значений приёмистостей $Q_в$ и небольших глубин H параметр ξ будет мал и значение входной температуры близка к устьевой. При малых приемистостях закачиваемая вода успевает прогреться почти до пластовой температуры. На рис. 26.1 приведены значения температуры на забое для реальных условий месторождения Белый Тигр в частном случае, когда температура на устье совпадает с температурой нейтрального слоя, $T_y=T_o$. Из графиков видно, что при высоких значениях приемистости $Q_в$ =2000 м^3/сут и выше, прогрев составляет менее 15% от максимально возможного. Это означает, что при глубине нагнетания 4000 м максимально возможный прогрев составил бы 40*3=120°С, 15% составит 18°С. Если температура на устье была 25°С, на забое она составит 43°С.

Для сравнения ниже приведены фактические данные по замерам температур в трёх нагнетательных скважинах залежи фундамента Белого Тигра. Первый замер соответствует установившемуся режиму в течение двух-трёх суток.

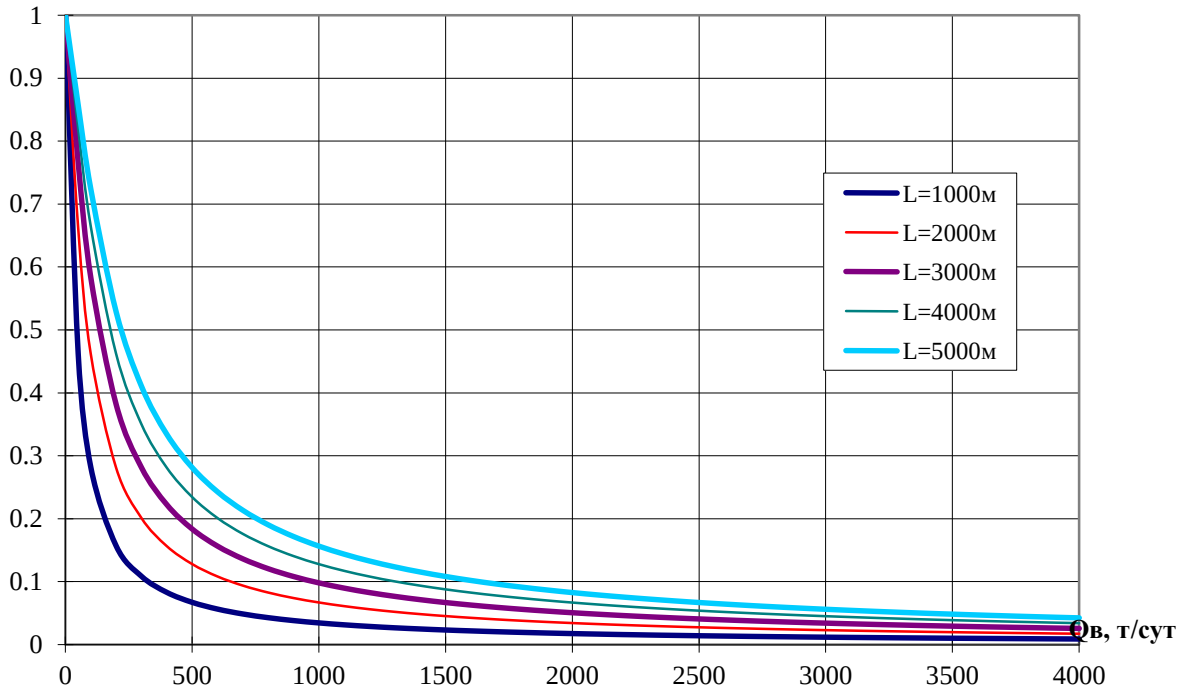


Рис.26.1. Приведённое повышение температуры нагнетаемой воды от устья скважины до её забоя, ($T_{вх}$-$T_у$)/ ($T_{пл}$-$T_у$). Отбор тепла от горной породы увеличивает температуру воды.

Промысловые замеры температуры закачиваемой воды на забое.

Приведём ещё важные промысловые данные о зависимости температуры забоя от приёмистости некоторых скважин для залежи фундамента Белого Тигра.

Скв.914. Дата исследований 10-12/05/02. Приёмистость 1000 м³/сут. Глубина замера 4000м. $T_{пл}$=146 °С. Интервалы смены между режимами – 24 часа.

Приёмистость, м³/сут	960	0	228	347	492	655	844
$T_{заб}$, °С	45.1	87.3	61	53.4	47.9	43.1	41.2

Скв.911. Дата исследований 11-22/06/02. Приёмистость 1000 м³/сут. Глубина замера 4150 м; $T_{пл}$=150°С. Интервалы смены между режимами – 24 часа.

Приёмистость, м³/сут	984	0	912	1193	1483	1676	1897
$T_{заб}$, °С	44.3	59.4	44.6	44.5	44.5	44.5	44.5

Скв.424. Дата исследований 06-10/09/03; Приёмистость 2000 м³/сут; Глубина замера 3930 м; $T_{пл}$=144.5°С. Интервалы между режимами – 12 часов.

Приёмистость, м³/сут	2004	0	1047	1523	2003
$T_{заб}$, °С	43,2	45,8	43,7	43,4	43,3

Анализ значительного числа проведённых расчётов показал, что основная вносимая погрешность обусловлена неточностями определения коэффициента теплопроводности. По глубине окружающая горная порода меняет свои свойства, осадочная толща неоднородна. На теплопроводность влияет и содержание влаги в горной породе. Среднее значение теплопроводности горных пород гранитов можно принять равным 3.5-4.0 Вт/м·°С. Что касается радиуса теплового возмущения горных пород вокруг скважины, то ориентировочно, $R(t) = 2\sqrt{a^2 t}$, где a^2 есть температуропроводность горной породы, в среднем 20 м²/год.

Температурный режим пласта.

Отличие температуры закачиваемой воды от температуры пласта приводит к тому, что вокруг забоев нагнетательных скважин образуются охлаждённые зоны, размеры которых растут с течением времени. Профили температур по радиальным направлениям от скважин имеют монотонный характер и плавно переходят от температуры на входе в пласт до пластовой температуры. Имеются замеренные лабораторные данные, есть и промысловые наблюдения.

Для простоты ограничимся лишь рассмотрением одномерного линейного вытеснения холодной водой горячей пластовой воды, полагая пласт теплоизолированным. Гидродинамическую картину течения считаем известной и стационарной. Скорость фильтрации, очевидно, будет одинаковой для всех точек пласта и неизменной во времени. Таким образом, мы ограничиваемся температурным режимом набитой песком и насыщенной горячей водой теплоизолированной трубки, в которую с одного торца закачивается холодная вода. Справедливости ради отметим, что полученное решение будет применимо и для мощных пластов, когда притоком тепла с кровли и подошвы можно

пренебречь. Что касается вопросов учёта теплообмена с кровлей и подошвой, то они достаточно подробно освещены в работах [2-4].

При моделировании процесса теплопереноса в пласте принято делать ещё ряд предположений. Это, в первую очередь [4], предположение о равенстве температуры жидкости и температуры скелета коллектора в данной точке. Для песчаника и других мелкомасштабных осадочных пород это предположение оправдано, но в трещинных породах с крупными размерами блоков есть резон вводить две температуры: одну для жидкости, другую для твердой породы. Второй случай мы не рассматриваем, но есть попытки его изучения в технической литературе. Выделением тепла за счет диссипации энергии пренебрегают, что связано с малыми значениями скоростей при фильтрации в горных породах. Теплопроводностью по скелету коллектора в направлении движения и поперек нее принято пренебрегать по сравнению с конвективным переносом тепла водой или другим флюидом. Теплофизические параметры принимают не зависящими или слабо зависящими функциями от температуры и давления.

При перечисленных и некоторых других предположениях задача определения температурного режима пласта может быть математически описана, например, дифференциальным уравнениям переноса и краевыми условиями

$$c_{пл}\frac{\partial T}{\partial t}+c_в u\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad c_{пл}=mc_в+(1-m)c_{пор} \tag{26.3}$$

$$T(x,0)=T_{пл}(x),\quad T(0,t)=T_{вх}(t) \tag{26.4}$$

Решение задачи (26.3) с краевыми условиями (26.4) элементарно и представляет собой бегущую волну

$$T(x,t)=F(x-wt),\quad w=c_в u/c_{пл}.$$

Значения температур несутся вдоль прямых $x\text{-}wt=const$. Семейство характеристик определяет температурное поле на данный момент времени t_0. Если обозначить точку, в которую приходит фронт температур от забоя через $x_0=wt_0$, решение до подхода фронта при $x>x_0$ представимо в виде

$$T(x,t_0)=T_{пл}(x-wt_0),$$

а за фронтом тепла при $x<x_O$ уже в виде $T(x,t_0)=T_{вх}(t_0-x/w)$.

Скорость $w=c_в u/c_{пл}$ называют скоростью движения температурного фронта. Здесь u обозначает скорость фильтрации, которая значительно меньше физической скорости $u_{физ}$ движения жидкости в поровых каналах. Связь между ними определяется через динамическое значение пористости m, $u=m\cdot u_{физ}$. Подставив в формулу для скорости движения температурного фронта, получаем

$$w=\frac{mc_в}{c_{пл}}u_{физ} \qquad (26.5)$$

Пористость имеет в среднем значения 0.15-0.20; объёмная теплоёмкость воды имеет значение 4.2 МДж/м³°С; объёмная теплоёмкость водонасыщенного пласта 2.9 МДж/м³°С. Связь между этими скоростями $w=0.25u_{физ}$. Это значит, что фронт распространения тепла примерно в 4 раза отстаёт от фронта вытеснения. Примеси, которые находятся в термальной воде, будут извлечены значительно раньше, чем пласт исчерпает свои энергетические возможности. Совмещая извлечение ценных компонент с отбором тепла, нужно иметь в виду, что первая задача кратковременна, тогда как отбор тепла продлится существенно дольше. Учет теплообмена с кровлей и подошвой еще более усугубит эту ситуацию, ибо в случае тонкого пласта основной отбор тепла будет идти с горных пород, тогда как ценные компоненты содержатся лишь в термальной воде.

В осесимметричном случае для стационарного течения задача (26.3-26.4) сохраняет свою запись с той лишь разницей, что скорость фильтрации зависит от радиальной координаты и определяется как отношение приёмистости к длине окружности $2\pi r$, где r-радиальная координата. Приведённое выше решение также сохраняет силу, если под координатой x понимать площадь, охваченную термическим воздействием.

Потери тепла по стволу добывающей скважины

Эти потери обусловлены тем, что окружающая скважину горная порода имеет монотонно снижающийся профиль температуры. Температура горной породы падает от пластовой температуры до температуры нейтрального слоя (около 10-15°С) вблизи устья скважины. Теплообмен с горными породами

способствует тому, что температура нефти (добываемой жидкости) снижается от пластовой температуры до температуры на устье. Ниже в таблице приведены для сведения некоторые замеренные значения, которые подтверждают, что снижение температуры тем больше, чем ниже дебит жидкости.

Таблица 26.1. Температурные данные по скважинам. Залежь фундамента месторождения Белый Тигр.

дата ввода	NN скв.	работающий интервал		дебит нефти т/сут	текущ обводн %	текущ газфакт м3/т	ГДИ скважин даты	темп устье °С	глубина замера м, абс	темп забой °С	темп пласт °С
09.88	1	**3043**	**3103**	36	0,5	370	08.11.03	38	3063	133,3	132,2
09.89	2	3193	3259	1160	0	188	03.06.04	104	3195	138,9	137,8
04.89	401	3070	3139	710	0	305	17.05.04	97	2713	134,4	132,2
09.89	402	3227	3650	890	0	198	06.06.04	98	2726	132,7	129,0
02.91	403	3145	3217	755	0	210	06.11.03	96	2705	136,1	133,3
03.93	404	**3200**	**3485**	580	0	186	23.03.04	96	3117	135,7	135,1
05.94	407	**3348**	**3586**	636	0	194	09.01.04	104	3268	137,9	136,7
05.98	409	3171	3331	664	0	200	12.06.04	95	3191	135,7	133,4
08.92	411	**3375**	**3433**	770	0	198	05.01.04	107	3286	132,9	132,4
07.00	413	3231	3388	665	0	200	19.07.03	100	3241		132
07.00	420	3239	3336	775	0	194	23.12.03	95	3232	128,7	128,3
05.00	421	3160	3453	870	0	195	04.06.04	100	3240		129,4
03.91	422	3217	3480	780	0	198	03.06.04	99	2959		127
07.96	426	**3470**	**3714**	650	0	185	03.02.04	96	3426	130	130
07.98	429	3422	3562	300	0	188	09.02.04	25	2894	59	119,9
05.97	430	3271	3369	794	0	192	18.07.03	103	3302		135
01.96	431	**3462**	**3728**	420	32	230	09.05.04	106	3511	141,1	136
04.97	438	3448	3801	830	5	194	03.09.03	102	3481		138
05.99	439	**3576**	4008	110	65,5	540	20.07.03	99	3584		140
08.03	440	**3575**	**3642**	350	46	240	07.05.04	100	3556	134,3	139,1
08.96	442	**3446**	**3734**	600	13	192	07.05.04	101	3471		135,0
04.98	449	3544	3733	620	0,8	165	05.06.04	90	3540		136
08.96	456	3496	3695	830	7,8	170	02.06.04	100	3497	13139	131,1
07.97	457	3421	3827	370	43	240	11.09.03	98	3441		128,5
06.98	478	3387	4462	190	0	300	09.02.04	66	3355	126,8	126,0
08.97	479	3590	4013	240	54,6	340	16.10.03	101	3624	133,9	130,1
09.00	491	3177	3398	1160	0	180	24.12.03	100	3187		128,3
12.01	556	3182	3445	837	0,3	185	23.12.03	97	3185		128,9
07.91	803	3299	3530	347	0	150	12.10.03	76	3232	123,2	
08.01	821	3704	968	125	0,6	180	22.04.04	62	3746	157,8	155,6
03.97	910	3346	3550	545	0	164	11.03.04	90	3422	140,4	140,1
03.97	918	3374	3662	570	0	160	11.09.03	90	3388	132	134
10.00	923	3301	3718	595	12,3	167	25.05.04	100	3304	142,5	140,3
12.01	1113	**3322**	**3468**	18	87,5	600	13.02.03	60	3300	121,7	
02.03	1116	3153	3229	750	0	190	18.02.03	85	3157	127,5	121,6
09.03	1117	3200	3306	500	0	172	20.09.03	70	3270	125,9	123,3
06.03	7001	**3346**	**3465**	1450	0	177	01.08.03	102	3197	132,9	129,7
11.03	7002	**3281**	3511	1430	0	184	06.01.04	95	3300	131,3	129,0

Судя по этим данным температурные потери с глубин 3000 м и более составляют при больших дебитах жидкости примерно 30°С, тогда как на малых дебитах жидкости они

весьма существенны. Расчет температурного профиля для добывающей скважины представляет значительные трудности по сравнению с нагнетательной скважиной по ряду обстоятельств. Во-первых, конструкция добывающей скважины может содержать колонну подъёмных труб, между колонной НКТ и обсадной колонной содержится покоящаяся нефть, вода или газ, что создаёт дополнительное сопротивление тепловым потерям. В целях сохранения тепла добываемой жидкости зазор между НКТ и обсадной колонной может быть частично заполнен сжатым газом, который имеет более низкую теплопроводность. Колонна НКТ может быть в целях той же теплоизоляции покрыта слоем малой теплопроводности. Из нефти, при движении по стволу из-за снижения давления, выделяется растворённый газ, пузырьки которого, расширяясь при подъеме, снижают температуру газа и температуру нефти, контактирующей с газом.В простейшем случае конструкции скважины и при отсутствии свободного газа для температурного профиля нефтяной скважины описание квазистационарной задачи может быть дано в виде

$$c_н Q_н \frac{dT}{dz} = \alpha(T - T_г), \quad \alpha = \frac{2\pi\lambda}{\ln(R(t)/r)}$$
$$T_г = T_0 + \gamma z, \quad T(H,t) = T_{пл}; \qquad (26.6)$$

Решение этой задачи уже элементарно, профиль температуры имеет вид экспоненты. Мы его не приводим. Для точки на устье можно получить значение

$$\frac{T_y - T_0}{T_{пл} - T_0} = \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}, \quad \xi = \frac{\alpha H}{c_н Q_н} \qquad (26.7)$$

Эта формула близка к (26.2), для случая добычи нефти параметр ξ будет иметь кратно большее значение, нежели в случае добычи воды.

Серьёзные споры в технической литературе имели место вокруг того, как определять параметр $\alpha(t)$, и насколько существенна его зависимость от времени. Поскольку добывающие скважины работают десятки лет, то приведённая выше таблица фактических замеров и формула (26.7) дают возможность сопоставить значения параметра $\alpha(t)$ для различных времён. Автор выполнил эту работу, и результаты имеют достаточно большой разброс значений α. Уменьшение параметра α во времени всё же наблюдается. Он варьирует в

пределах от 6 до 15 Вт/м·°С, причём малые значения относятся преимущественно к давно работающим скважинам.

Задачи термического режима скважины.

Одной из проблем, возникающих при добыче термальной воды из глубоколежащих горизонтов, есть проблема учёта фазового перехода воды в парообразное состояние в стволе скважины при определении температурного профиля в добывающих малодебитных скважинах.

Много работ посвящено температурному режиму скважин. Однако мало работ, в которых учитывается выделение газа из пластовой нефти в стволе скважины и влияния такого выделения на её температурный режим. Если устьевые давления ниже давления насыщения, а забойное давление выше давления насыщения, то в стволе скважины будем иметь уровень, в которой давление равно давлению насыщения. С этой точки и выше начнётся выделение газа из нефти, причём количество выделившегося газа пропорционально разности между давлением насыщения и давлением в заданной точке скважины. Газ выделяется в виде мелких пузырьков, которые расширяются вверх и сливаются друг с другом, вплоть до образования чёточного режима движения. Обычно растворённого в нефти газа немного, до 20% от общей массы. Выделяется из нефти до устья скважины её часть, которая соответствует разности между давлением насыщения и давлением на устье скважины. Из-за расширения газа происходит её адиабатическое охлаждение, которое передается и нефтяной фазе. Как такое выделение влияет на температурный профиль добывающей нефтяной скважины? Вопрос мало изученный, сложность решения в том, что физические свойства нефти меняются с выделением газа. Приходится прибегать к модельным представлениям.

Литература к лекции 26.

1. *Бурже Ж., Сурно П., Комбарну М.* Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1989. 422 с.
2. *Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В.* Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. М.: Недра, 1985. 271 с.
3. *Шейнман А.Б., Малофеев Г.Е., Сергеев А.И.* Воздействие на пласт теплом при добыче нефти. М.: Недра, 1969. 275 с.
4. *Чекалюк Э.Б.* Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965. 238 с.

5. *Яковлев Б.А.* Решение задач нефтяной геологии методами термометрии. М.: Недра, 1979. 143 с.
6. *Череменский Г.А.* Геотермия. Л.: Недра, 1972. 272 с.
7. Системы извлечения тепла земной коры и методы их расчета/ *Щербань А.Н., Цирульников А.С., Мерзляков Э.И., Рыженко И.А.* – Киев, Наукова думка, 1986. 248с.
8. *Просёлков Ю.М.* Теплопередача в скважинах. М.: Недра, 1986. 252 с.

Рекомендуемая для справок общая литература.

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952. 812 с.
2. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. М.: Наука. Часть 1, 1972. 468 с.; Часть 2, 1969. 332 с.
3. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1970. 478 с.
4. *Гурский Д.А., Турбина Е.С.* Mathcad для студентов и школьников. Популярный самоучитель. СПб: Питер, 2005. 400 с.
5. *Чёрный Г.Г.* Газовая динамика: Учебник для университетов и втузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 424 с.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, Часть 1. М.: Наука, Физматлит. 1963. 585 с.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: ИИЛ,1956. 528 с.
8. *Слёзкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1956. 519 с.
9. *Лейбензон Л.С.* Собрание трудов. Том 2. Подземная гидрогазодинамика. М.: Издательство АН СССР, 1953. 544 с.
10. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
11. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. Учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.
12. *Фазлыев Р.Т.* Площадное заводнение нефтяных месторождений. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 256 с.
13. *Вахитов Г.Г.* Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. М.: Недра, 1970. 248 с.
14. *Самарский А. А. , Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука. Физматлит. 1976. 351 с.
15. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
16. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.
17. *Бейтмен Г. и Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 344 с.

18. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. Физматлит, 1977. 440 с.
19. Справочник по специальным функциям// под редакцией *М. Абрамовица и И. Стиган.* М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 832 с.
20. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

Учебно-методическое пособие

Алишаев Мухтар Гусейнович

Моделирование и расчёты в прикладной механике и добыче нефти

Спецкурс для магистров

Подготовка оригинал-макета *Керимов В.А.*
Дизайн обложки *Багамаев М.К.*

Подписано в печать 15.12.2015 г.
Формат 60x84 1/16. Печать ризографная. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Усл. п. л. 18,5. Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии АЛЕФ, ИП Овчинников М.А.
367000, РД, г. Махачкала, ул. С.Стальского 50
Тел.: +7-903-477-55-64, +7-988-2000-164
www.alefgraf.ru, e-mail: alefgraf@mail.ru